SÉRIE A, N° 4703
N° D'ORDRE :
5551

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE grade DE DOCTEUR ès Sciences mathématiques

PAR

Jean-Pierre AUBIN

1re **THÈSE.** — Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels.

2e **THÈSE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
Algèbres de Lie ; Poids et racines.

Soutenues le 16.6.1966 **devant la Commission d'examen.**

MM. R. GODEMENT *Président.*

J.-P. KAHANE
J.-L. LIONS } *Examinateurs.*

SÉRIE A, N° 4703
N° D'ORDRE :
5551

THÈSES

PRÉSENTÉES

A LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE grade DE DOCTEUR ès Sciences mathématiques

PAR

Jean-Pierre AUBIN

1re **THESE.** — Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels.

2e **THESE.** — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.
Algèbres de Lie ; Poids et racines.

Soutenues le 16.6.1966 **devant la Commission d'examen.**

MM. R. GODEMENT *Président.*

J.-P. KAHANE
J.-L. LIONS } *Examinateurs.*

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/IA41546018_0019

BULLETIN

DE LA

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE

DE FRANCE

PUBLIÉ

AVEC LE CONCOURS DU CENTRE NATIONAL DE LA RECHERCHE SCIENTIFIQUE

SUPPLÉMENT au numéro de DECEMBRE 1967

MÉMOIRE N°12

Bull. Soc. math. France
Mémoire 12, 1967, 139p.

Approximation des espaces de distributions
et des opérateurs différentiels

par Jean-Pierre AUBIN

SOCIÉTÉ MATHÉMATIQUE DE FRANCE
11, rue Pierre-Curie, PARIS 5e

Publication trimestrielle

SUPPLÉMENTS au Bulletin de la Société mathématique de France.

- Les "Comptes rendus des séances", qui avaient paru annuellement de 1911 à 1938, ne sont plus disponibles séparément, mais sont tous incorporés, année par année, dans la réimpression du Bulletin de la Société mathématique de France, tomes 39 (1911) à 66 (1938), y compris, pour chacune des années 1911, 1921, 1922, 1923 et 1924 (séances du "Cinquantenaire" et séances ordinaires de 1924), les tables qui n'existaient pas à l'origine.

Les autres suppléments ci-après sont disponibles séparément :

- 1939. - Conférences de la Réunion internationale des mathématiciens, tenue à Paris en juillet 1937.

- "Mémoires" :

1. FORT (Jacques). - Contribution à l'étude des éléments tertiaires et isotypiques dans les modules et les $(\mathcal{C})$-algèbres (Thèse).
2. GIRAUD (Jean). - Méthode de la descente.
3. GRILLET (Pierre-Antoine). - Homomorphismes principaux de tas et de groupoïdes (Thèse).
4. BERTRANDIAS (Françoise). - Ensembles remarquables d'adèles algébriques (Thèse).
5. BERTRANDIAS (Jean-Paul). - Espaces de fonctions bornées et continues en moyenne asymptotique d'ordre p (Thèse).
6. VO-KHAC Khoan. - Etude des fonctions quasi-stationnaires et de leurs applications aux équations différentielles opérationnelles (Thèse).
7. BERNAT (Pierre). - Sur le corps enveloppant d'une algèbre de Lie résoluble.
8. MALLIAVIN-BRAMERET (Marie-Paule). - Largeurs d'anneaux et de modules (Thèse).
9. RENAULT (Guy). - Etude des sous-modules compléments dans un module (Thèse).
10. ZINN-JUSTIN (Nicole). - Dérivations dans les corps et anneaux de caractéristique p (Thèse).
11. BERTIN (Jean-Etienne). - Variété de Picard de type linéaire commutatif (Thèse).
12. AUBIN (Jean-Pierre). - Approximation des espaces de distributions et des opérateurs différentiels (Thèse).

© Tous droits réservés
Société mathématique de France.

Bull. Soc. math. France,
Mémoire 12, 1967, 139 p.

APPROXIMATION DES ESPACES DE DISTRIBUTIONS ET DES OPERATEURS DIFFERENTIELS

par Jean-Pierre AUBIN (*)

Que Monsieur J.L. LIONS veuille bien accepter ici l'expression de ma profonde reconnaissance pour n'avoir cessé de me prodiguer ses conseils et ses encouragements.

Je remercie Monsieur R. GODEMENT d'avoir bien voulu présider le jury de cette thèse et Monsieur J.P. KAHANE de me faire l'honneur d'y participer.

Ma reconnaissance va également à Monsieur M. GAUSSENS et à l'Electricité de France pour les facilités qui m'ont été accordées.

Enfin, je remercie Monsieur J. CEA (dont les travaux ont été au point de départ de celui-ci) et Monsieur P.A. RAVIART pour leur amicale collaboration.

(*) Thèse Sc. math. , Paris 1966 .

TABLE DES MATIERES

INTRODUCTION 8

CHAPITRE I - APPROXIMATION DES ESPACES DE BANACH ET DES OPERATEURS.

§1 . APPROXIMATIONS D'UN ESPACE DE BANACH. 10

1-1 L'ensemble Z . 10
1-2 Approximations d'un espace de Banach. 10
1-3 Stabilité - Convergence discrète et convergence. 11
1-4 Approximations partielles. 14
1-5 Approximations duales. 14
1-6 Approximations autoadjointes. 16
1-7 Approximations discrètes. 16
1-8 Approximations de Galerkine. 18
1-9 Troncatures de Tchebychev. 20
1-10 Construction d'approximations. 21

§2 . APPROXIMATION DES OPERATEURS. 23

2-1 Approximations des espaces d'opérateurs. 23
2-2 Les espaces πE_h et βE_h associés à $A_h(E)$. 24
2-3 Stabilité des opérateurs. 25
2-4 Approximation discrète des opérateurs. 27
2-5 Approximation faible des opérateurs. 30
2-6 Approximation des opérateurs compacts. 31
2-7 Approximation des opérateurs différentiables. 32

§3 . APPROXIMATION DES OPERATEURS D'UN ESPACE DANS SON DUAL. 36

3-1 Formulation variationnelle. 37
3-2 Conditions suffisantes de stabilité des opérateurs A_h^{-1} . 38
3-3 Approximation par les restrictions d'un opérateur . Etude de l'erreur. 44
3-4 Approximation par les restrictions partielles d'un opérateur A . 48
3-5 Approximation faible des opérateurs monotones. 51
3-6 Approximation des solutions définies par le lemme des projections. 53

§4 . APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES. 56

4-1 Position du problème. 57

4-2 Théorèmes de convergence. 58

§5 . APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES OPERATIONNELLES (I) . 64

5-1 Rappels sur les équations différentielles-opérationnelles du 1e ordre. 64

5-2 Approximation par des systèmes d'équations différentielles. 66

CHAPITRE II - APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV ET DES SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

§1 . APPROXIMATIONS DES ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES ET DES ESPACES L^P . 71

1-1 Notations. 71

1-2 Approximations discrètes stables et convergentes des espaces de fonctions continues. 73

1-3 Approximations des espaces L^P (d μ) . 77

§2 . APPROXIMATIONS DES ESPACES DE SOBOLEV SUR R^n . 80

2-1 Puissance de convolution des fonctions caractéristiques. 81

2-2 Approximations des espaces de Sobolev sur R^n . 85

2-3 Approximation des espaces de distributions. 92

§3 . APPROXIMATIONS DES ESPACES DE SOBOLEV SUR UN OUVERT Ω . 93

3-1 Les réseaux $R_h^K(\Omega)$. 93

3-2 Approximations des espaces $W_o^{m,P}(\Omega)$. 95

3-3 Approximations des espaces $W^{m,P}(\Omega)$. 99

3-4 Approximation de sous-ensembles convexes des espaces de Sobolev. 104

§4 . APPROXIMATION DES SOLUTIONS DE PROBLEMES AUX LIMITES POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS LINEAIRES OU NON. 107

4-1 Rappels sur les problèmes elliptiques d'ordre 2 m . 107

4-2 Approximation des solutions du problème de Neumann pour des opérateurs elliptiques d'ordre 2 m . 110

4-3 Approximation des solutions des problèmes aux limites pour des opérateurs différentiels non linéaires. 113

4-4 Approximation des solutions de problèmes aux limites unilatéraux - Calcul d'une capacité. 118

§5 . APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES OPERATIONNELLES (II) . 120

5-1 Convergence forte des solutions du schéma explicite. 120

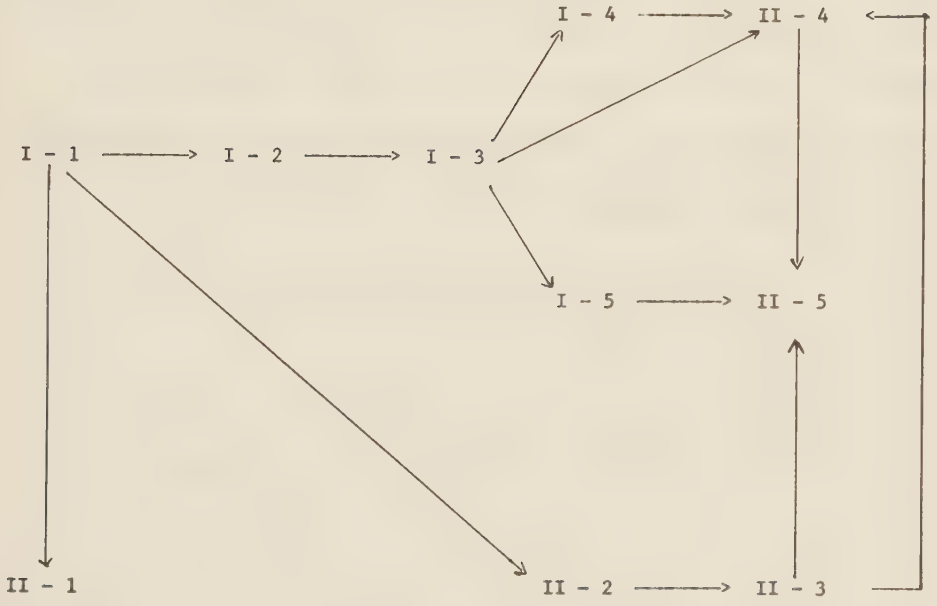
5-2 Approximation des solutions des équations paraboliques. 127

5-3 Construction de schémas à plusieurs niveaux - Majoration de l'erreur. 129

APPENCIDE 134

BIBLIOGRAPHIE 137

Relation d'ordre dans la lecture des paragraphes :



INTRODUCTION

Notre but est d'approcher les solutions de divers problèmes différentiels, linéaires ou non, par des solutions de problèmes approchés aux "différences finies" *et de donner une méthode générale de construction de ces problèmes approchés* (Chap II, §4 et §5).

Sous son aspect général, le problème se présente de la façon suivante :

Soit A un opérateur (linéaire ou non) d'un espace de Banach E dans un autre espace de Banach F ; on admet qu'il existe une solution du

problème P. Chercher u dans E tel que $A(u) = f$ donné dans F .

On se donne un paramètre h destiné à tendre vers 0 , auquel on associe un opérateur A_h d'un espace E_h dans un espace F_h (ces espaces étant de dimension finie) et on remplace le problème P par le

problème P_h . Chercher u_h dans E_h tel que $A_h(u_h) = f_h$ dans F_h .

On se pose alors les questions suivantes :

- En quel sens définir la "convergence" de u_h vers u ?
- Quelles conditions doivent satisfaire les opérateurs A_h pour que la "convergence" des données entraîne celle des solutions ?
- Comment construire des opérateurs A_h vérifiant ces conditions ?

Généralement, pour définir la convergence, on munit chacun des E_h d'une norme $||u_h||_h$, on se donne un opérateur r_h de E dans E_h (celui, par exemple, qui à toute fonction continue associe ses valeurs aux points d'un réseau) et on dit que u_h converge discrètement vers u si $||u_h - r_h u||_h$ tend vers 0 avec h . Cette notion dépend du choix des normes $||u_h||_h$ sur E_h , même si, pour h fixé, ces normes sont équivalentes. Nous introduirons alors une autre notion ; nous construirons des opérateurs linéaires continus de E_h dans E et nous dirons que u_h converge vers u (fortement ou faiblement) si $p_h u_h$ converge vers u dans E (fort ou faible). La convergence discrète entraîne la convergence forte si (et seulement si) $||p_h u_h||_E \leqslant M||u_h||_h$ (M indépendante de h) et $p_h r_h u$ converge vers u pour tout u . (Chap I ; §1, théorème 1 du §1). Ainsi nous définirons une approximation $A_h(E)$ de E dans E_h :

$$A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h)$$

par la donnée d'un opérateur p_h de E_h dans E et d'une application r_h de E dans E_h . (Chap I , §1).

Donnons-nous maintenant une approximation $A_h(F) = (F , F_h , q_h , s_h)$ de F

dans F_h . Les hypothèses à faire sur les opérateurs A_h pour que la convergence discrète de f_h vers f entraîne celle de u_h vers u sont les suivantes (Chap I , §2 , théorème 1 du §2) :

- *Les* A_h *sont consistants à* A *en* u , c'est-à-dire :

$$||A_h(r_h u) - s_h A(u)||_{F_h} \quad \text{tend vers } 0 \text{ avec } h$$

- *Les opérateurs* A_h^{-1} *sont stables*, c'est-à-dire : les opérateurs A_h^{-1} sont globalement (en h) uniformément continus :

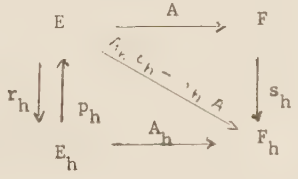
Pour tout ε , il existe η tel que $||f_h - g_h||_h \leq \eta$ entraîne :

$$||A_h^{-1}(f_h) - A_h^{-1}(g_h)||_h \leq \varepsilon \qquad \text{pour tout } h .$$

Si les opérateurs A_h sont linéaires, on retrouve la notion classique de stabilité :

$$||A_h^{-1} f_h||_h \leq M||f_h||_h \quad ; \quad M \text{ indépendante de } h .$$

Enfin, comment construire les opérateurs A_h consistants à A , inversibles, et tels que les A_h^{-1} soient stables ? on considère le schéma suivant :



Considérons alors l'opérateur particulier suivant :

$$A_h = s_h A p_h .$$

Nous étudierons alors les conditions à imposer aux opérateurs p_h et s_h pour que, dans une classe d'opérateurs donnée, les conditions précédentes soient satisfaites (Chap I , §2 , §3 , §4 et 5) et nous étudierons spécialement le comportement de l'erreur.

Nous considérerons en particulier la classe des opérateurs différentiables (au sens de Fréchet), des opérateurs d'un espace sur son dual, des opérateurs définis par des inéquations variationnelles, des équations différentielles opérationnelles.

Ainsi ramenons-nous au chapitre I , l'étude de l'approximation des solutions du problème P à la construction d'approximations des espaces E et F vérifiant certaines propriétés. *Ces approximations sont indépendantes du choix d'un opérateur* A *particulier et permettent de construire des problèmes approchés en explicitant les opérateurs* $A_h = r_h A p_h$.

Les premiers paragraphes du chapitre II sont donc consacrés à la construction d'approximations des espaces de distributions. Puisque maints problèmes différentiels sont posés dans les espaces de Sobolev, nous étudions plus spécialement leurs approximations (Chap II , §2 et §3). Les §4 et §5 développent quelques exemples d'approximation des solutions des problèmes aux limites (même unilatéraux) pour des opérateurs différentiels linéaires ou non, des solutions d'équations paraboliques. Nous obtenons alors des problèmes approchés du type "schémas aux différences finies", parmi lesquels nous retrouvons les schémas classiques.

CHAPITRE 1.

APPROXIMATION DES ESPACES DE BANACH ET DES OPERATEURS

§1. APPROXIMATIONS D'UN ESPACE DE BANACH.

Nous donnons aux n° 1.1 à 1.6 les définitions et les propriétés des approximations que nous utiliserons par la suite.

Les numéros 1.7 à 1.10 donnent des premiers exemples d'approximations.

Signalons que l'on peut définir des approximations d'espaces plus généraux que des espaces de Banach : En particulier, on peut définir des approximations d'un espace topologique complètement régulier (c'est-à-dire uniformisable et séparé). Mais cette généralisation ne nous est pas utile ici.

On peut aborder dès la fin de ce paragraphe, les §1 , §2 et §3 du chapitre II, où l'on trouvera des exemples d'approximations des espaces de distributions.

1-1. L'ENSEMBLE Z

Nous désignerons par Z un ensemble de paramètres h muni d'un filtre F à base dénombrable. Pour simplifier les notations, nous supposerons que Z est un sous-ensemble d'un espace vectoriel de dimension finie, dont l'adhérence contient l'origine. Nous prendrons pour filtre F la trace sur Z du filtre des voisinages de l'origine.

1-2. APPROXIMATIONS D'UN ESPACE DE BANACH

DEFINITION 1-1.

Nous appelerons *approximation (d'ordre* h *)* $A_h(E)$ *d'un espace de Banach* E *dans un espace de Banach* E_h la donnée :

(1-1) $A_h(E)$ est la donnée
- i) d'un espace de Banach E_h, muni d'une norme $||u_h||_h$
- ii) d'une application linéaire continue p_h de E_h dans E
- iii) d'une application r_h de E dans E_h.

Nous désignerons l'approximation $A_h(E)$ par la notation

(1-2) $$A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h).$$

et nous dirons que :

(1-3)
- i) p_h est le *prolongement* de l'approximation $A_h(E)$
- ii) r_h est la *restriction* de l'approximation $A_h(E)$
- iii) $p_h r_h$ est la *troncature* de l'approximation $A_h(E)$

Si u appartient à E et u_h appartient à E_h, nous dirons que :

(1-4)
- i) $||u_h - r_h u||_h$ est l'*erreur discrète* entre u et u_h
- ii) $u - p_h u_h$ est l'*erreur entre* u *et* u_h.
- iii) $u - p_h r_h u$ est l'*erreur de troncature de* u.

REMARQUE 1-1.

La donnée de la norme $||u_h||_h$ de l'espace E_h *entre dans la définition de* $A_h(E)$: Si l'on remplace la norme $||u_h||_h$ par une norme équivalente $|||u_h|||_h$, nous obtenons une approximation différente : en effet, il existe bien des constantes $c(h)$ et $C(h)$ telles que

$$||u_h||_h \leq c(h)|||u_h|||_h \leq C(h)||u_h||_h$$

mais ces constantes peuvent tendre vers l'infini quand h tend vers 0. (cf. §2, n° 2-2).

EXEMPLE 1-1

Si E_h est un espace de dimension finie et si p_h est injectif, alors

(1-5) $$||u_h||_h = ||p_h u_h||$$

est une norme. Ce choix de la norme $||u_h||_h$ ne convient pas toujours (cf. n° 1-4 et 1-5).

1-3. STABILITE, CONVERGENCE DISCRETE ET CONVERGENCE.

Considérons à présent une famille $A_h(E)$ d'approximations de E lorsque h parcourt Z. Nous sommes conduits à faire des hypothèses globales sur ces approximations.

DEFINITION 1-2.

Nous dirons que les *prolongements sont stables* s'il existe une constante M indépendante de h telle que

$$(1\text{-}6) \qquad ||p_h u_h|| \leq M||u_h||_h \quad \text{pour tout } h \text{ et pour tout } u_h \text{ de } E_h .$$

Nous dirons que les *restrictions* r_h *sont stables* si

$$(1\text{-}7) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Pour tout } \varepsilon \text{ , il existe } \eta \text{ tel que} \\ ||u - v|| \leq \eta \quad \text{entraîne} \quad ||r_h u - r_h v||_h \leq \varepsilon \quad \text{pour tout } h \end{array} \right.$$

Nous dirons qu'une famille $\pi u_h = (u_h)_h$ d'éléments u_h de E_h :

a) *converge discrètement* vers un élément u de E si

$$(1\text{-}8) \qquad \lim_{h=0} ||u_h - r_h u||_h = 0$$

b) *converge fortement (resp. faiblement)* vers u si

(1-9) $p_h u_h$ converge fortement (resp. faiblement) vers u dans E .

Nous dirons enfin que les approximations sont stables si les prolongements et les restrictions sont stables et que les approximations sont convergentes si les erreurs de troncature tendent vers 0 :

$$(1\text{-}10) \qquad \lim_{h=0} ||u - p_h r_h u|| = 0 \quad \text{pour tout } u \text{ dans } E .$$

Nous dirons aussi que les restrictions r_h *sont globalement bornées* si

$$(1\text{-}11) \qquad ||r_h u||_h \leq m(u)||u|| \quad \text{pour tout } h .$$

Si les restrictions r_h sont linéaires, les conditions (1-7) et (1-11) sont équivalentes.

Dire que les approximations $A_h(E)$ sont convergentes est dire que tout élément u de E est limite d'une famille $p_h u_h$, ou encore que $\bigcup_h p_h E_h$ est dense dans E .

Inversement, si $\bigcup_h p_h E_h$ est dense dans E et si $p_h E_h \subset p_k E_k$ pour $k < h$, il existe des restrictions r_h telles que les $A_h(E)$ soient convergentes.

Remarquons enfin que *la notion de convergence discrète dépend du choix des normes* $||u_h||_h$ *de* E_h .

L'introduction de ces définitions est motivée par le :

THEOREME 1-1.

Pour que la convergence discrète implique la convergence forte, il faut et il suffit que :

a) *les prolongements soient stables*

b) *les approximations* $A_h(E)$ *soient convergentes.*

L'inégalité

$$||u - p_h u_h|| \leqslant ||u - p_h r_h u|| + ||p_h(u_h - r_h u)||$$

montre que les conditions a) et b) sont suffisantes. La condition b) est nécessaire puisque $r_h u$ converge discrètement vers u par définition. On suppose que la condition a) n'est pas nécessaire : il existe alors une famille $(u_h)_h$ telle que :

$$||u_h||_h \leqslant 1 \quad \text{et} \quad \eta_h = ||p_h u_h|| \quad \text{tend vers l'infini.}$$

Si $v_h = \eta_h^{-1/2} u_h$, on en déduit que v_h converge discrètement vers 0 et que $p_h v_h$ tend vers l'infini, ce qui contredit l'hypothèse.

Si l'on suppose de plus que les restrictions sont linéaires et stables, on déduit de l'inégalité :

$$||p_h r_h u|| \leqslant M||r_h u||_h \leqslant m\,M||u||$$

que

(1-12) $|||u||| = \lim_{h=0} ||r_h u||_h$ est une norme équivalente à $||u||$.

PROPOSITION 1-1.

Supposons que les approximations soient stables. Pour que les approximations soient convergentes, il faut et il suffit que :

$$\lim_{h=0} ||p_h r_h u - u|| = 0 \qquad \textit{pour tout } u \in P \ ; \ P \textit{ dense dans } E \ .$$

Dans ce cas $p_h r_h u$ *converge vers* u *uniformément sur tout compact de* E .

En effet, si les prolongements et les restrictions sont stables, les troncatures $p_h r_h$ forment un ensemble équicontinu d'applications de E dans lui-même, d'où la proposition .

COROLLAIRE 1-1.

Supposons que l'injection de K *dans* E *soit compacte, et que les approximations* $A_h(E)$ *soient stables et convergentes.*

Alors, si les restrictions sont linéaires :

$$\gamma(h) = \sup_{u \in K} \frac{||u - p_h r_h u||}{||u||_K} \quad \textit{tend vers } 0 \textit{ avec } h \ .$$

Cela revient à montrer que les troncatures $p_h r_h$ convergent uniformément sur tout borné de K , qui est relativement compact dans E . Mais cela résulte de la proposition précédente.

1-4. APPROXIMATIONS PARTIELLES

Supposons que l'espace E soit un sous espace *fermé* de l'intersection d'une suite finie d'espaces E_q (que nous supposerons tous plongés dans un même espace localement convexe séparé.)

$$(1\text{-}13) \qquad E \subset \bigcap_q E_q \quad ; \quad ||u|| = \sup_q ||u||_q$$

DEFINITION 1-3.

Nous dirons que les approximations de E_q *dans* E_h :

$$(1\text{-}14) \quad A_h(E_q) = (E_q , E_h , p_h^q , r_h)$$

sont des approximations partielles de E *si :*

$$(1\text{-}15) \quad \begin{cases} p_h^q u_h \text{ tend vers } u_q \text{ dans } E_q \text{ faible pour tout } q \text{ , tous les éléments} \\ u_q \text{ sont égaux à un même élément } u \text{ de } E \end{cases}$$

Nous dirons que les approximations $A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h)$ *sont plus fines que les approximations partielles* $A_h(E_q)$ *si*

$$(1\text{-}16) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad ||p_h u_h|| \leq \sup_q ||p_h^q u_h||_q \\ \text{ii)} \quad ||p_h^q u_h||_q \leq K \text{ entraîne } \lim_{h=0} (p_h u_h - p_h^q u_h) = 0 \text{ dans } E_q \text{ faible.} \end{cases}$$

Nous supposerons que l'une des expressions suivantes :

$$(1\text{-}17) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad ||u_h||_h = \sup_q ||p_h^q u_h||_h \\ \text{ii)} \quad ||u_h||_h = (\sum_q ||p_h^q u_h||^\alpha)^{1/\alpha} \quad ; \quad 1 \leq \alpha \leq +\infty \end{cases}$$

est une norme de E_h .

Si les approximations $A_h(E_q)$ sont convergentes, dire alors que u_h converge discrètement vers u est dire que

$$(1\text{-}18) \quad \lim_{h=0} \sup_q ||u - p_h^q u_h||_q = 0$$

1-5. APPROXIMATIONS DUALES

Soient E (resp.E_h) un espace de Banach, E'(resp.E_h') son dual, (f , u) (resp. $(f_h , u_h)_h$) une forme bilinéaire mettant E et E' (resp. E_h et E_h') en

dualité.

Considérons les normes duales sur E' et E'_h :

$$(1\text{-}19)\quad ||f||_* = \sup_v ||v||^{-1} |(f , v)| \; ; \; ||f||_{*h} = \sup_{v_h} ||v_h||_h^{-1} |(f_h , v_h)_h|$$

Considérons des approximations $A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h)$ où les restrictions sont linéaires.

DEFINITION 1-4.

Nous dirons que l'approximation du dual E' *de* E :

$$A_h^*(E') = (E' , E_h , p_h^* , r_h^*)$$

où E_h *est muni de la norme* $||f_h||_{*h}$ *, où* p_h^* *est la transposée de* r_h *et* r_h^* *la transposée de* p_h :

$$(1\text{-}20)\quad (p_h^* f_h , v) = (f_h , r_h v)_h \; ; \; (r_h^* f , v_h)_h = (f , p_h v_h)$$

est l'approximation duale $A_h^*(E')$ *de* $A_h(E)$

On déduit des propriétés des applications transposées la :

PROPOSITION 1-2.

Si les prolongements p_h *(resp. les restrictions* r_h *) sont stables, les restrictions* r_h^* *(resp. les prolongements* p_h^* *) sont également stables. Si les approximations* $A_h(E)$ *sont convergentes, les troncatures* $p_h^* r_h^*$ *convergent faiblement et uniformément sur tout borné de* E' *vers l'identité.*

En effet, la norme de p_h^* est égale à celle de r_h et la norme de r_h^* à celle de p_h . De plus, si B est un borné de E' :

$$\lim_{h=0} \sup_{f\in B} |(p_h^* r_h^* f - f , u)| \leq \lim_{h=0} \sup_{f\in B} ||f||_* \; ||p_h r_h u - u||$$

Dire que f_h converge discrètement vers f dans E' est dire que :

$$(1\text{-}21)\quad ||r_h^* f - f_h||_h = \sup_{v_h} ||v_h||_h^{-1} |(f , p_h v_h) - (f_h , v_h)_h| = 0.$$

1-6. APPROXIMATIONS AUTOADJOINTES.

Supposons que E_h est un espace de dimension finie, identifié à son dual E'_h. Supposons de plus que

(1-22) $\quad p_h E_h \subset E \cap E' \quad$ pour tout h .

Puisque E_h est de dimension finie :

(1-23) $\quad p_h \in L(E_h , E) \cap L(E'_h , E') \; ; \; r_h^* \in L(E , E_h) \cap L(E' , E'_h)$

DEFINITION 1-5.

Sous les conditions (1-22) *et* (1-23), *nous dirons que les approximations* $A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h^*)$ *et* $A_h(E') = (E' , E'_h , p_h , r_h^*)$ *sont des approximations autoadjointes de* E *et de* E' .

Dire alors que les approximations autoadjointes $A_h(E)$ sont stables est dire que les prolongements p_h sont stables dans $A_h(E)$ et dans $A_h(E')$:

$$||p_h u_h|| \leq M||u_h||_h \quad ; \quad ||p_h f_h||_* \leq m||f_h||_{*h}$$

PROPOSITION 1-3.

Supposons que E *s'identifie à un sous espace dense de* E' .
Si les approximations autoadjointes $A_h(E)$ *sont stables et convergentes, les approximations autoadjointes* $A_h(E')$ *sont également stables et convergentes.*

On sait déjà que les approximations $A_h(E')$ sont stables et faiblement convergentes. D'après la proposition 1-1 , il suffit de montrer que $p_h r_h^* f$ converge vers f dans E' pour f de E . Mais cela résulte de ce que

$$||p_h r_h^* f - f||_* \leq ||p_h r_h^* f - f|| \text{ tend vers } 0 .$$

1-7. APPROXIMATIONS DISCRETES.

Nous allons donner un procédé de construction d'approximations de E . Associons à tout paramètre h un ensemble R_h (dénombrable) d'indices α et des suites σ_h et S_h dans E et E' respectivement :

$$(1\text{-}24) \quad \begin{cases} \sigma_h = (\sigma_h^\alpha)_{\alpha \in R_h} & ; \sigma_h^\alpha \in E \\ S_h = (S_h^\alpha)_{\alpha \in R_h} & ; S_h^\alpha \in E' \end{cases}$$

DEFINITION 1-6.

Nous dirons que les suites σ_h *et* S_h *définissent une approximation discrète de* E *désignée par* $A_h(E) = (E , \sigma_h , S_h)$ *si les conditions suivantes sont satisfaites :*

(1-25) $\quad p_h r_h u = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h} (S_h^{\alpha} , u)\sigma_h^{\alpha}$ *est continue de* E *dans* E .

Une approximation discrète est une approximation

$A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h)$ de E avec

(1-26)
$$\begin{cases} \text{i) } E_h = \text{l'espace des suites } r_h u = ((S_h^{\alpha} , u))_{\alpha \in \mathcal{R}_h} \\ \text{ii) } p_h u_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h} u_h^{\alpha} \sigma_h^{\alpha} \\ \text{iii) } r_h u = ((S_h^{\alpha} , u))_{\alpha \in \mathcal{R}_h} \end{cases}$$

En effet, si E_h est muni de la topologie la moins fine rendant continue p_h , la restriction r_h est continue d'après (1-25).

La condition (1-25) *est toujours satisfaite si les suites* σ_h *et* S_h *sont finies.*

On remarque que si la suite S_h est topologiquement libre dans E' , l'espace E_h contient les suites u_h à support fini ($u_h^{\alpha} = 0$ sauf pour un nombre fini d'indices α), si E est réflexif .

Si les suites σ_h et S_h sont finies et linéairement indépendantes, E_h est un espace de dimension finie N(h) , p_h est un isomorphisme et r_h un homomorphisme.

PROPOSITION 1-4.

Supposons que les suites σ_h *et* S_h *soient biorthogonales :*

(1-27) $\quad (S_h^{\alpha} , \sigma_h^{\beta}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases}$

et vérifiant (1-25).

Alors p_h *est un isomorphisme,* r_h *est un homomorphisme et* $p_h r_h$ *est un projecteur continu de* E *sur* $p_h E_h$.

L'hypothèse (1-27) entraîne que $r_h p_h$ est l'identité de E_h :

$$(r_h p_h u_h)^\alpha = (S_h^\alpha \ , \ \sum_\beta u_h^\beta \sigma_h^\beta) = u_h^\alpha \quad ; \ \alpha \in \mathcal{R}_h \ .$$

Il en résulte donc que p_h est inversible à gauche et r_h inversible à droite et ces applications sont continues. De plus, E est la somme directe topologique du noyau de r_h et de $p_h E_h$.

Si une approximation discrète $A_h(E) = (E , \sigma_h , S_h)$ vérifie (1-27), nous dirons que c'est une *interpolation*, puisque $p_h u_h$ est une solution du problème : Trouver u dans E vérifiant :

$$(S_h^\alpha , u) \ u_h^\alpha \qquad \text{pour tout } \alpha \text{ de } \mathcal{R}_h \ .$$

On remarque enfin que l'approximation duale d'une approximation discrète est :

(1-28) $\quad A_h^* (E') = (E' , S_h , \sigma_h)$.

Si σ_h est une suite à valeurs dans $E \cap E'$ telle que

(1-29) $\quad p_h r_h^* u = \sum_\alpha (\sigma_h , u) \sigma_h^\alpha$ soit continue

l'approximation discrète $A_h(E) = (E , \sigma_h , \sigma_h)$ est autoadjointe.

On trouvera dans J. DIEUDONNE [1] l'étude des suites biorthogonales dans un espace vectoriel topologique. Au sujet des problèmes d'interpolation et d'approximation optimales, voir J.P. AUBIN [7] .

1-8. APPROXIMATIONS DE GALERKINE.

Soit E un espace de Banach séparable. Il existe alors (au moins) une suite dénombrable d'éléments ω^α de E ($\alpha = 1 , 2 , \dots , n , \dots$), totale dans E , que l'on peut toujours supposer (algébriquement) libre. On construit à partir de cette suite une approximation de E de la manière suivante :

On prend :

(1-30)
- i) $h = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$; $E_h = \mathbb{C}^n$; $u_h = (u_h^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq n} \in \mathbb{C}^n$
- ii) $p_h u_h = \sum_{\alpha=1}^{n} u_h^\alpha \omega^\alpha$; $||u_h||_h = ||p_h u_h||$
- iii) $r_h u$ est telle que $p_h r_h u$ converge vers u quand n tend vers ∞ .

Nous dirons que de telles approximations sont des *approximations de GALERKINE de* E .

Si l'espace E admet une base de Schauder ω^α (cf. N. DUNFORD - J. SCHWARTZ |1| , p. 93), il existe une suite scalaire u^α telle que :

$$u = \sum_{\alpha=1}^{\infty} u^{\alpha}\, \omega^{\alpha} .$$

On peut prendre alors pour restriction (non linéaire) : $r_h u = (u^1, \ldots, u^n)$.

Si H est un espace de Hilbert séparable et si ω^{α} est une base orthonormale de H, nous obtenons des approximations de Galerkine autoadjointes, stables et convergentes, en prenant :

$$r_h u = ((u , \omega^{\alpha}))_{1 \leq \alpha \leq n}$$

Plus généralement, soient V et H deux espaces de Hilbert tels que

(1-31) *l'injection de* V *dans* H *est compacte ;* V est dense dans H.

Rappelons que (cf. Appendice)

$$V \subset H \subset V' \quad , \text{ les injections étant denses et compactes.}$$

L'opérateur non borné $\Lambda = \{ V , H , ((u , v)) \}$ est hermitien et son inverse J est compact. Les espaces de Hilbert V, H, V' sont munis des produits scalaires hermitiens suivants :

$$\begin{cases} ((u , v)) = (\Lambda u , v) = ((\Lambda u , \Lambda v))_{*} & \text{sur } V \\ (u , v) = ((\Lambda u , v))_{*} = ((J u , v)) & \text{sur } H \\ ((u , v))_{*} = (J u , v) = ((J u , J v)) & \text{sur } V' \end{cases}$$

D'autre part, il existe une base orthonormale de H formée des vecteurs propres de l'opérateur Λ :

(1-32) $$\Lambda\, \omega^{\alpha} = \lambda_{\alpha}\, \omega^{\alpha} \quad ; \quad (\omega_{\alpha} , \omega_{\beta}) = \delta_{\alpha\beta} .$$

Désignons alors par V_h, H_h et V'_h l'espace $\mathbb{C}^n$ muni des produits scalaires suivants :

(1-33)
$$\begin{cases} ((u_h , v_h))_h = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{\alpha}\, u_h^{\alpha}\, \overline{v}_h^{\alpha} = ((p_h u_h , p_h v_h)) \\ (u_h , v_h)_h = \sum_{\alpha=1}^{n} u_h^{\alpha}\, \overline{v}_h^{\alpha} = (p_h u_h , p_h v_h) \\ ((u_h , v_h))_{*h} = \sum_{\alpha=1}^{n} \lambda_{\alpha}^{-1}\, u_h^{\alpha}\, \overline{v}_h^{\alpha} = ((p_h u_h , p_h v_h))_{*} \end{cases}$$

Posons, si $h = n^{-1}$:

(1-34) $$p_h u_h = \sum_{\alpha=1}^{n} u_h^{\alpha}\, \omega^{\alpha} \quad ; \quad r_h^{*} u = ((u , \omega^{\alpha}))_{1 \leq \alpha \leq n}$$

PROPOSITION 1-5.

Sous l'hypothèse (1-31) *les approximations :*

$A_h(V) = (V , V_h, p_h, r_h^*)$; $A_h(H) = (H , H_h, p_h, r_h^*)$; $A_h(V') = (V', V'_h, p_h, r_h^*)$

sont des approximations autoadjointes stables et convergentes des espaces V , H *et* V' .

En effet, $\frac{\omega^\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}}$ est une base orthonormale de V et $\sqrt{\lambda_\alpha}\omega^\alpha$ est une base orthonormale de V' , (d'après (1-32) et (1-33)). La proposition résulte de ce que :

$$p_h r_h^* u = \sum_{\alpha=1}^{n} (u , \omega^\alpha)\omega^\alpha = \sum_{\alpha=1}^{n} ((u , \frac{\omega^\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}})\frac{\omega^\alpha}{\sqrt{\lambda_\alpha}} = \sum_{\alpha=1}^{n} ((u , \sqrt{\lambda_\alpha}\,\omega^\alpha))_* \sqrt{\lambda_\alpha}\,\omega^\alpha$$

et des propriétés des bases orthonormales d'un espace Hilbertien.

En particulier, les troncatures $p_h r_h^*$ sont des projecteurs des espaces V , H , V' . Ces approximations de Galerkine autoadjointes sont "optimales" (J P AUBIN [4]).

1-9 TRONCATURES DE TCHEBYCHEV.

Nous allons considérer dans ce numéro des restrictions r_h telles que les troncatures soient des projections sur un ensemble $p_h K_h$.

Donnons-nous deux espaces de Banach E et E_h et un prolongement p_h (linéaire continu) de E_h dans E .

Supposons que :

(1-35) E_h est réflexif ; K_h est un sous ensemble convexe fermé de E_h .

PROPOSITION 1-6.

Il existe au moins une restriction r_h *de* E *dans* K_h *telle que*

(1-36) $||u - p_h r_h u|| \leqslant ||u - p_h u_h||$ *pour tout* u_h *de* K_h .

DEFINITION 1-7.

Si (1-36) *a lieu, nous dirons que* $p_h r_h$ (resp. r_h) *est une troncature* (resp. *une restriction*) *de Tchebychev ou de meilleure approximation dans* K_h .

Considérons la fonctionnelle $J_u(u_h) = ||u - p_h u_h||$. Elle est faiblement semi-continue inférieurement sur E_h . D'après le théorème de Weirstrass, elle atteint son minimum en un point $r_h u$ d'un ensemble B_h si celui-ci est faiblement compact.

Soit $s_h u$ un élément particulier de K_h . Alors $J_u(s_h u) \geqslant \eta$, où :

$$\eta = \inf_{K_h} J_u(u_h) .$$

Donc si $||p_h u_h - p_h s_h u|| \geqslant 2\, J_u(s_h u)$, alors :

$$J_u(u_h) = ||u - p_h s_h u + p_h s_h u - p_h u_h|| > n .$$

Donc si le minimum $r_h u$ atteint par $J_u(u_h)$ sur K_h existe, il appartient nécessairement à l'intersection B_h de K_h et de l'image réciproque par p_h de la boule fermée de centre $p_h s_h u$ et de rayon $2\, J_u(s_h u)$. L'ensemble B_h est alors convexe, fermé et borné, donc faiblement compact puisque E_h est réflexif, ce qui implique que le minimum $r_h u$ existe. En particulier, si $K_h = E_h$ est un espace de dimension finie, l'hypothèse (1-35) est satisfaite et il existe une restriction de Tchebychev.

REMARQUE 1-2.

S'il existe des approximations $A_h(E) = (E , E_h , p_h , s_h)$ convergentes de E et si $p_h K_h \subset K$, les approximations de Tchebychev $A_h(K) = (K , K_h , p_h , r_h)$ de K sont convergentes.

En particulier, si :

$p_h K_h \subset p_k K_k$ pour $k < h$ et si $\bigcup_h p_h K_h$ est dense dans K , les approximations $A_h(K)$ de Tchebychev sont convergentes.

REMARQUE 1-3.

En adaptant un résultat classique, on montre que si la norme de E est *strictement convexe* :

$||u + v|| = ||u|| + ||v||$ si et seulement si $u = \lambda v$ ($u , v \neq 0$) ; la restriction de Tchebychev est unique (si K_h est convexe).

1-10. CONSTRUCTION D'APPROXIMATIONS.

Soit $A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h)$ une approximation de E .

Donnons-nous un espace F et des applications linéaires continues P_h et R_h :

(1-37) $\quad P_h \in L(E , F) \quad ; \quad R_h \in L (F , E)$.

Il est clair que :

(1-38) $\quad A_h(F) = (F , E_h , P_h p_h , r_h R_h)$ est une approximation de F dans E_h .

Si l'approximation $A_h(E) = (E , \sigma_h , S_h)$ est une approximation discrète (n°1-7), l'approximation $A_h(F)$ est également discrète :

$$A_h(F) = (F , P_h \sigma_h , R'_h S_h)$$

où $P_h \sigma_h = (P_h \sigma_h^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}_h}$ et $R'_h S_h = (R'_h S_h^\alpha)_{\alpha \in \mathcal{R}_h}$

PROPOSITION 1-7.

Supposons que les approximations $A_h(E)$ soient stables et convergentes. Si P_h et R_h convergent simplement vers des opérateurs P et R et vérifient :

$$(1\text{-}39) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad ||P_h u||_F \leq ||u||_E \ ; \ ||R_h v||_E \leq ||v||_F \\ \text{ii)} \quad P R = 1 \end{cases}$$

les approximations $A_h(F)$ sont également stables et convergentes.

REMARQUE 1-4.

Les restrictions r_h ne sont pas supposées être nécessairement linéaires. La stabilité des approximations $A_h(F)$ est évidente d'après (1-39) i).

La condition (1-39) i) exprime que les opérateurs P_h et R_h forment des ensembles (uniformément) équicontinus H_1 et H_3 de $C(E , F)$ et $C(F , E)$, et la stabilité des approximations $A_h(E)$ entraîne que les troncatures $p_h r_h$ forment un ensemble équicontinu H_2 de $C(E , F)$. La composition des fonctions étant continue sur les ensembles équicontinus (munis de la convergence simple), on en déduit que les troncatures $P_h p_h r_h R_h$ de $A_h(F)$ convergent simplement vers $PR = 1$ dans $C(F , F)$, ce qui achève la démonstration de la proposition.

La condition (1-39) ii) exprime que F est isomorphe à un sous-espace fermé de E .

La proposition 1-7 permet de déduire d'une famille d'approximations la construction d'autres approximations.

Remarquons que l'approximation duale de $A_h(F)$ est :

$$(1\text{-}40) \quad A^*_h(F') = (F' , E'_h , R'_h p^*_h , r^*_h P'_h)$$

REMARQUE 1-5.

On déduit de la proposition 1-2 que si $P R = 1$, si R est compact et si les approximations $A_h(E)$ sont stables et convergentes, les approximations duales $A^*_h(F')$ sont stables et (fortement) convergentes.

§2. APPROXIMATIONS DES OPERATEURS.

On définit au n° 2-1 la *consistance* des opérateurs approchés, aux n° 2-2 et 2-3 la *stabilité* des opérateurs approchés. Le n° 2-4 étudie les conditions suffisantes pour que la convergence discrète des données implique celle des solutions (Théorème 2-1). (Ces résultats peuvent se généraliser au cas où E est un espace topologique complètement régulier).

Le n° 2-5 étudie les conditions suffisantes pour que la convergence faible des données implique la convergence faible des solutions, le n° 2-6 l'approximation des opérateurs compacts.

On montre au n° 2-7 que la stabilité des différentielles de Fréchet d'une famille d'opérateurs entraîne la stabilité "locale" de ces opérateurs.

Le théorème 2-1 sera utilisé constamment dans ce chapitre. On suppose connus les n° 1-1 à 1-3 du § 1 .

2-1 APPROXIMATIONS DES ESPACES D'OPERATEURS.

Donnons-nous deux familles d'approximations :

$$\text{i)}\quad A_h(E) = (E , E_h , p_h , r_h) \qquad (2\text{-}1)$$

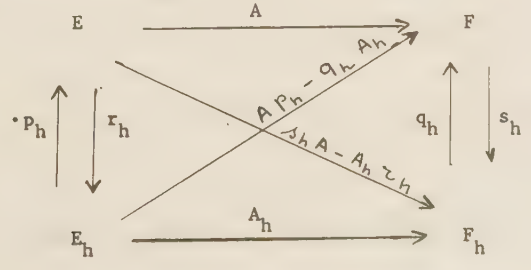
$$\text{ii)}\quad A_h(F) = (F , F_h , q_h , s_h)$$

des espaces de Banach E et F . Soient $\mathcal{F}(E , F)$ et $\mathcal{F}(E_h , F_h)$ les espaces d'opérateurs de E dans F et de E_h dans F_h . On définit des prolongements P_h de $\mathcal{F}(E_h , F_h)$ dans $\mathcal{F}(E , F)$ et des restrictions R_h de $\mathcal{F}(E , F)$ dans $\mathcal{F}(E_h , F_h)$ de la manière suivante :

$$\text{i)}\quad P_h A_h = q_h A_h r_h \quad ; \quad A_h \in \mathcal{F}(E_h , F_h) \qquad (2\text{-}2)$$

$$\text{ii)}\quad R_h A = s_h A p_h \quad ; \quad A \in \mathcal{F}(E , F)$$

comme le montre le schéma suivant :



DEFINITION 2-1.

Nous dirons qu'une famille d'opérateurs A_h *de* E_h *dans* F_h *est consistante à un opérateur* A *de* E *dans* F *sur* $B \subset E$ *si :*

$$\lim_{h=0} \|s_h A(u) - A_h(r_h u)\|_{F_h} = 0 \quad \textit{pour tout} \quad u \in B . \tag{2-3}$$

Nous dirons qu'une famille d'opérateurs A_h *est (faiblement) ajustable à* A *si :*

$$\|p_h u_h\| \leqslant M \quad \textit{entraîne que} \quad \lim_{h=0} A(p_h u_h) - q_h A_h(u_h) = 0 \quad \textit{dans} \quad E \quad \textit{(faible)}. \tag{2-4}$$

2-2 LES ESPACES πE_h et βE_h ASSOCIES A $A_h(E)$.

Donnons-nous une famille d'approximations $A_h(E)$ d'un espace de Banach dans des espaces de Banach E_h , munis des normes $\|u_h\|_h$. Nous avons été conduits jusqu'ici à considérer des familles $(u_h)_h$ d'éléments u_h de E_h , et ces familles $(u_h)_h$ appartiennent à l'espace produit $\prod_{h \in Z} E_h$.

Nous allons introduire sur cet espace produit une topologie plus fine que la topologie produit.

Pour simplifier les notations, nous désignerons par

$$\pi u_h = (u_h)_{h \in Z} \quad \in \prod_h E_h \tag{2-5}$$

une famille d'éléments u_h de E_h .

DEFINITION 2-2.

Nous désignerons par πE_h *l'espace métrique obtenu en munissant l'espace produit* $\prod E_h$ *de la distance :*

$$\|\pi u_h - \pi v_h\| = \sup_{h \in Z} \|u_h - v_h\|_h \tag{2-6}$$

Nous désignerons par βE_h *le sous espace des* $\pi u_h = \beta u_h$ *tels que*

$$\|\beta u_h\| = \sup_{h \in Z} \|u_h\|_h < +\infty \tag{2-7}$$

et nous dirons que la famille βu_h *est stable.*

PROPOSITION 2-1.

Si les espaces E_h *sont des espaces de Banach, l'espace* πE_h *est un groupe*

métrique complet et l'espace βE_h *un espace de Banach.*

Il est clair que l'injection de πE_h dans ΠE_h est continue. Montrons que tout voisinage d'un système fondamental de voisinages de l'origine de πE_h est fermé dans ΠE_h. Mais les produits $\Pi B_h(\varepsilon)$ des boules fermées de rayon ε forment un système fondamental de voisinages de πE_h, fermés dans ΠE_h. On sait alors que, puisque ΠE_h est complet, il en est de même de πE_h.

Montrons maintenant que βE_h est fermé dans πE_h. Soit πu_h une famille adhérente à βE_h, et $\varepsilon > 0$. Il existe βv_h tel que $||\pi u_h - \beta v_h|| \leq \varepsilon$. Alors :

$$||\pi u_h|| \leq ||\pi u_h - \beta v_h|| + ||\beta v_h|| < +\infty$$

ce qui implique que $\pi u_h = \beta u_h \in \beta E_h$.

EXEMPLE 2-1.

Si tous les espaces E_h sont égaux à E, πE est l'espace des fonctions u_h de Z dans E muni de la topologie de la convergence uniforme sur Z. L'espace βE est alors le sous-espace de Banach des fonctions bornées de Z dans E.

REMARQUES 2-1.

Si $B(Z)$ est l'espace des fonctions scalaires $\lambda(h)$ bornées sur Z, πE_h est un $B(Z)$ module topologique ($\lambda.\pi u_h = \pi \lambda(h)u_h$).

L'espace βE_h est ouvert dans ΠE_h. *Si l'on modifie les normes de* E_h, *on obtient des espaces* βE_h *différents.* (Cf. remarque 1-1 du §1, n° 1-1).

2-3 STABILITE DES OPERATEURS.

Donnons des approximations $A_h(E)$ et $A_h(F)$ des espaces E et F et considérons les espaces πE_h et πF_h associés.

Soit $(A_h)_h$ une famille d'opérateurs A_h de E_h dans F_h. Elle définit un opérateur πA_h de πE_h dans πF_h de la manière suivante :

(2-8) $\qquad \pi A_h(\pi u_h) = \pi A_h(u_h)$

DEFINITION 2-3.

Nous dirons que les opérateurs A_h *de* E_h *dans* F_h *sont stables si :*

(2-9) πA_h *est uniformément continu de* πE_h *dans* πF_h *c'est-à-dire si :*

(2-9) $\left\{\begin{array}{l} \text{Pour tout } \varepsilon > 0 \text{ , il existe } \eta \text{ tel que} \\ \sup_h ||u_h - v_h||_{E_h} \leq \eta \text{ entraîne que } \sup_h ||A_h(u_h) - A_h(v_h)||_{F_h} \leq \varepsilon \end{array}\right.$

Nous dirons que les opérateurs A_h *sont globalement bornés si :*

(2-10) πA_h *est un opérateur borné de* βE_h *dans* βF_h

c'est-à-dire si :

(2-10) $\sup_h ||u_h||_{E_h} \leq M$ *entraîne que* $\sup_h ||A_h(u_h)||_{F_h} \leq M'$

Cette notion est conforme au sens intuitif. Si les erreurs commises entre u_h et v_h sont "bornées" en h , il en est de même des erreurs commises entre $A_h(u_h)$ et $A_h(v_h)$.

PROPOSITION 2-2.

Si les opérateurs A_h *sont linéaires, les conditions* (2-9) *et* (2-10) *sont toutes les deux équivalentes à :*

(2-11) *Il existe* $M > 0$ *telle que* $||A_h u_h||_{F_h} \leq M||u_h||_{E_h}$ *pour tout* h .

Il est clair que (2-11) implique (2-9) et (2-10). Inversement, (2-10) implique (2-11) puisque πA_h est 1 opérateur linéaire borné de βE_h dans βF_h , donc continu d'après la proposition 2-1 . Montrons enfin que la stabilité entraîne (2-13) . Dire que πA_h est continu à l'origine est dire que pour tout $a > 0$, il existe $b > 0$ tel que

(2-12) $\sup_h ||v_h||_{E_h} \leq b$ entraîne que $\sup_h ||A_h v_h||_{F_h} \leq a$.

Soit πu_h un élément arbitraire de πE_h . Posons :

$\lambda(h) = b||u_h||_{E_h}^{-1}$ si $u_h \neq 0$; $\lambda(h) = 1$ si $u_h = 0$.

alors $\pi v_h = \pi \lambda(h) u_h$ vérifie l'hypothèse de (2-12) et par suite :

(2-11) $||A_h u_h||_{F_h} \leq a\,\lambda(h)^{-1} = \frac{a}{b}||u_h||_{E_h}$

REMARQUE 2-2.

Les définitions 1-2 du §1 sont compatibles avec la définition 2-3 . Dire que les prolongements sont stables est dire que $\pi\, p_h$ est continu de $\pi\, E_h$ dans $\pi\, E$ et dire que les restrictions sont globalement bornées est dire que $\pi\, r_h$ est continu de $\pi\, E$ dans $\pi\, E_h$.

2-4. APPROXIMATION DISCRETE DES OPERATEURS.

Considérons les problèmes suivants :

PROBLEMES Q(resp. Q_h)

Etant donné u (resp. u_h) *dans* E (resp. E_h), *obtenir* $f = A(u)$ (resp. $f_h = A_h(u_h)$ *dans* F (resp. F_h)

PROBLEMES P(resp. P_h)

Etant donné f *dans* F (resp. f_h dans F_h), *trouver* u *dans* E(resp. u_h *dans* E_h) *tels que* $A(u) = f$ (resp. $A_h(u_h) = f_h$).

Les résultats généraux suivants établissent des conditions sur les opérateurs A_h pour que la convergence discrète des données entraîne celle des solutions.

LEMME 2-1.

Pour que la convergence discrète de u_h *vers* u *entraîne celle de* $f_h = A_h(u_h)$ *vers* $f = A(u)$, *il suffit que :*

(2-13)
- i) *les opérateurs* A_h *soient consistants à* A .
- ii) *les opérateurs* A_h *soient stables.*

Ces conditions sont nécessaires si les opérateurs A_h *et* A *sont linéaires.*

Les conditions sont suffisantes. En effet :

$$(2\text{-}14)\qquad f_h - s_h f = A_h(u_h) - A_h(r_h u) + A_h(r_h u) - s_h A(u) .$$

Pour tout ε , il existe η tel que

$$\|A_h(u_h) - A_h(r_h u)\|_{F_h} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{dès que} \quad \|u_h - r_h u\|_{E_h} \leq \eta$$

d'après la stabilité. La convergence discrète de u_h vers u et la consistance des opérateurs A_h à A implique que pour $h \leq h_o$

$||u_h - r_h u||_{E_h} \leq \eta$ et $||A_h(r_h u) - s_h A(u)||_{F_h} \leq \frac{\varepsilon}{2}$.

On déduit de tout ceci que $||f_h - s_h f||_{F_h} \leq \varepsilon$ pour h assez petit.

Les conditions sont nécessaires si A_h et A sont linéaires :

Tout d'abord, les opérateurs A_h sont stables, sinon, il existerait β u_h dans β E_h tels que :

$$||u_h||_{E_h} \leq M \quad \text{et} \quad \eta_h = ||A_h u_h||_{F_h} \quad \text{tend vers l'infini.}$$

L'hypothèse est contredite en prenant $v_h = \eta^{-1/2} u_h$, qui converge discrètement vers 0 , tandis que $||A_h v_h||_{F_h}$ tend vers l'infini.

Les opérateurs A_h étant stables, on déduit de (2-14) que les opérateurs A_h sont consistants à A .

THEOREME 2-1.

Supposons que les opérateurs A_h et A soient bijectifs. Pour que la convergence discrète de f_h vers f entraîne celle de $u_h = A_h^{-1}(f_h)$ vers $u = A^{-1}(f)$, il suffit que :

(2-15)
$$\begin{cases} \text{i) } \textit{les opérateurs } A_h \textit{ soient consistants à } A \textit{ (en } u\textit{)} \\ \text{ii) } \textit{les opérateurs } A_h^{-1} \textit{ soient stables.} \end{cases}$$

Ces conditions sont nécessaires si les opérateurs A_h et A sont linéaires et si les opérateurs A_h sont stables.

D'après le lemme précédent, il suffit de montrer que la consistance des opérateurs A_h à A implique la consistance des opérateurs A_h^{-1} à A^{-1} , si les opérateurs A_h^{-1} sont stables.

Mais cela résulte immédiatement de :

(2-16) $$r_h A^{-1}(f) - A_h^{-1}(s_h f) = A_h^{-1}(A_h(r_h u)) - A_h^{-1}(s_h A(u))$$

Inversement, si les A_h sont linéaires, le lemme précédent entraîne que les opérateurs A_h^{-1} sont stables et consistants à A^{-1} . Le raisonnement précédent montre que si les A_h sont stables, les opérateurs A_h sont consistants à A .

Nous allons donner maintenant des exemples d'opérateurs A_h stables et consistants à A :

PROPOSITION 2-3.

Supposons que l'opérateur A *soit uniformément continu et que*

(2-17) { i) *les prolongements* p_h *et les restrictions* s_h *soient stables*
ii) *les approximations* $A_h(E)$ *soient convergentes.*

Alors les restrictions $s_h A p_h$ *de l'opérateur* A *sont stables et consistantes à* A .

En effet, puisque $\pi s_h A p_h = \pi s_h . \pi A . \pi p_h .$ est le produit de trois opérateurs uniformément continus, il est lui-même uniformément continu, ce qui montre la stabilité des restrictions $s_h A p_h$.

D'autre part, $||s_h A(p_h r_h u) - s_h A(u)||_{F_h} < \varepsilon$ donné dès que $||p_h r_h u - u|| < \eta$ puisque $\pi s_h A$ est uniformément continu, et cette dernière égalité est réalisée pour h assez petit puisque les approximations $A_h(E)$ sont convergentes. Les restrictions $s_h A p_h$ de A sont bien consistantes à A .

Nous donnerons au §3 n° 3.3 des exemples d'opérateurs A *inversibles tels que leurs restrictions soient inversibles et stables.*

REMARQUES 2-3.

Dans le cas où les opérateurs A_h sont linéaires, le théorème 1 du §2 est un résultat classique : cf. par exemple S. GODUNON - V. RYABENKII , [1], V. THOMEE, [1] , P.D. LAX [1] , etc...

Si les opérateurs πA_h^{-1} est Höldérien :

$$||A_h^{-1}(f_h) - A_h^{-1}(g_h)||_h \leq M||f_h - g_h||_h^{\theta} \quad ; \quad M , \theta > 0 .$$

Nous en déduisons une évaluation de l'erreur discrète :

$$(2\text{-}18) \quad ||u_h - r_h u||_h \leq M(||f_h - s_h f||_h + ||s_h A(u) - A_h r_h(u)||_h)^{\theta}$$

Si les opérateurs A_h ne sont pas linéaires, la condition de stabilité n'est pas nécessaire.

Nous montrerons au n° 2-7 (théorème 2 du §2) que si les opérateurs A_h sont différentiables, la stabilité des inverses des différentielles en $r_h u_o$ entraîne la stabilité locale des opérateurs A_h^{-1} .

Nous donnerons aux §3 (n° 3-2) deux conditions suffisantes de stabilité lorsque les opérateurs sont définis d'un espace de Banach V dans son dual.

Remarquons enfin que la théorie classique de l'approximation des solutions des équations différentielles usuelles entre dans le cadre de la théorie précédente : le théorème 1 du §2 implique en particulier le théorème classique affirmant que stabilité et consistance entraînent la convergence discrète des solutions. (Pour des conditions de stabilité plus faibles, cf. J.P. AUBIN [5] .).

2-5. APPROXIMATION FAIBLE DES OPERATEURS.

Nous allons étudier les conditions suffisantes pour que la convergence faible des données des problèmes P_h et Q_h entraîne la convergence faible des solutions.

Nous dirons qu'un opérateur A est *faiblement continu* de E dans F (resp. *uniformément faiblement continu*) si A est continu (resp. uniformément continu) de E faible dans F faible. Tout opérateur linéaire continu d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est uniformément faiblement continu.

LEMME 2-2.

Supposons que A soit faiblement continu. Pour que la convergence faible de u_h vers u entraîne la convergence faible de $f_h = A_h(u_h)$ vers $f = A(u)$, il suffit que A_h soit faiblement ajustable à A . Cette condition est nécessaire si E est réflexif.

La condition suffisante résulte de l'inégalité :

$$f - q_h f_h = A(u) - A(p_h u_h) + A(p_h u_h) - q_h A_h(u_h) \tag{2-19}$$

puisque, si $p_h u_h$ converge faiblement vers u , $||p_h u_h||$ est borné.

Inversement, si E est réflexif (ou est le dual d'un espace de Banach) et si $||p_h u_h||$ est borné, il existe (au moins) u^* faiblement adhérent à $p_h u_h$. Donc si une sous-suite $p_{h_n} u_{h_n}$ converge faiblement vers u_* , $q_{h_n} A_{h_n}(u_{h_n})$ converge faiblement vers $A(u^*)$ et 0 est faiblement adhérent à $A(p_h u_h) - q_h A_h(u_h)$ et c'est le seul point faiblement adhérent (d'après (2-19)).

LEMME 2-3.

Supposons que l'inverse A^{-1} de A soit uniformément faiblement continu et que

$$\text{(2-20)} \quad \begin{cases} \text{i) } \textit{les prolongements } p_h \textit{ sont stables} \\ \text{ii) } \textit{les opérateurs } A_h^{-1} \textit{ sont globalement bornés} \\ \text{iii) } \textit{les opérateurs } A_h \textit{ sont faiblement ajustables à } A\ . \end{cases}$$

Si $||f_h||_{F_h} \leq M$ et si f_h converge faiblement vers f , $u_h = A_h^{-1}(f_h)$

converge faiblement vers $u = A^{-1}(f)$.

Le lemme résulte de l'égalité :

$$(2\text{-}21) \quad u - p_h u_h = \left[A^{-1}(f) - A^{-1}(q_h f_h)\right] + \left[A^{-1}(q_h A_h(u_h)) - A^{-1}(A(p_h u_h))\right]$$

Si $q_h f_h$ converge faiblement vers f , le premier terme du membre de droite tend vers 0 . Si $||f_h||_{F_h} \leq M$, $||u_h||_{E_h} \leq M$ puisque les opérateurs A_h^{-1} sont globalement bornés, donc $||p_h u_h||$ est borné puisque les prolongements sont stables. Le second terme du membre de droite tend vers 0 puisque les A_h sont faiblement ajustables à A et puisque A^{-1} est uniformément faiblement continu.

Nous allons donner des exemples d'opérateurs A_h faiblement ajustables à A :

PROPOSITION 2-4.

Supposons que l'opérateur A *soit borné, que* F *soit réflexif et que les approximations duales* $A_h^*(F')$ *soient convergentes. Les restrictions* $s_h A p_h$ *de l'opérateur* A *sont faiblement ajustables à* A .

Il faut montrer que si $||p_h u_h||$ est borné, $(1 - q_h s_h) A(p_h u_h)$ converge faiblement vers 0 .

Mais $A(p_h u_h)$ est dans un borné de F puisque A est borné et que $q_h s_h$ converge vers 1 faiblement et uniformément sur tout ensemble borné de F d'après la proposition 1-2 puisque les approximations duales $A_h^*(F')$ sont convergentes.

Nous donnerons des exemples d'approximation faible d'opérateurs non linéaires monotones et coercifs au n° 3-5 du §3 et au n° 4-3 du §4 du chapitre II.

2-6 APPROXIMATION DES OPERATEURS COMPACTS.

Un opérateur A de E dans F est compact si l'image par A de tout ensemble borné de E est relativement compacte dans F . Nous allons établir des propriétés analogues pour des approximations de A .

PROPOSITION 2-5.

Supposons que les approximations $A_h(F)$ *soient stables et convergentes. Les restrictions* $s_h A p_h$ *d'un opérateur compact* A *sont ajustables à* A .

Montrons que si $||p_h u_h||$ est borné :

$(1 - q_h s_h)A(p_h u_h)$ converge vers 0 dans F .

Mais $A(p_h u_h)$ est dans un ensemble relativement compact de F et l'on sait d'après la proposition 1-1 que $q_h s_h$ converge vers 1 uniformément sur tout ensemble compact de F .

PROPOSITION 2-6.

Supposons que les opérateurs A_h soient ajustables à un opérateur compact A . Si $p_h u_h$ demeure dans un borné de E , alors $q_h A_h(u_h)$ demeure dans un ensemble relativement compact de F .

Puisque F est métrisable, on peut supposer que Z est dénombrable. Il suffit de démontrer que pout tout ε , il existe une suite finie $h_1 , \dots , h_n$ telle que pour tout h , il existe h_i vérifiant :

$$||q_h A_h(u_h) - q_{h_i} A_{h_i}(u_{h_i})|| \leqslant \varepsilon$$

Posons :

$$\alpha(h) = q_h A_h(u_h) - A(p_h u_h) .$$

Fixons-nous $\varepsilon > 0$. Puisque les A_h sont ajustables à A , il existe h_m tel que si $h \geqslant h_m$, on ait $\alpha(h) \leqslant \frac{\varepsilon}{3}$.

D'autre part, pour $h \geqslant h_m$, $A(p_h u_h)$ formant un ensemble relativement compact, il existe un élément h_i d'une suite finie $h_m , \dots , h_n$ tel que

$$||A(p_h u_h) - A(p_{h_i} u_{h_i})|| \leqslant \frac{\varepsilon}{3} .$$ Alors :

$$||q_h A_h(u_h) - q_{h_i} A_{h_i}(u_{h_i})|| \leqslant \alpha(h) + \alpha(h_i) + ||A(p_h u_h) - A(p_{h_i} u_{h_i})|| \leqslant \varepsilon$$

et la suite finie $h_1 , \dots , h_m , \dots , h_n$ répond à la question.

2-7. APPROXIMATION DES OPERATEURS DIFFERENTIABLES.

Un opérateur A d'un espace de Banach E dans un espace de Banach F est différentiable sur un ouvert U de E s'il existe des opérateurs linéaires continus $DA(u)$ de E dans F tels que :

$$(2\text{-}22) \quad \begin{cases} \text{i) } A(u + v) = A(u) + DA(u)v + \omega(u ; v) \\ \text{ii) } \lim_{||v|| = 0} ||v||^{-1} ||\omega(u ; v)|| = 0 \end{cases}$$

Donnons-nous maintenant des approximations $A_h(E)$ et $A_h(F)$ des espaces E et F et des opérateurs A_h de E_h dans F_h , continûment différentiables, et tels

que les différentielles $DA_h(r_h u_o)$ soient inversibles pour u_o fixé dans U .

Nous allons déduire la stabilité des opérateurs A_h^{-1} dans des voisinages de $A_h(r_h u_o)$ de la stabilité des $DA_h^{-1}(r_h u_o)$.

Rappelons pour cela le

LEMME (A). (M. VAINBERG [1] p. 45).

Supposons que les différentielles $u \to DA(u)$ soient bornées d'une boule $B(\rho + \varepsilon)$ de E dans $L(E , F)$. Les différentielles $u \to DA(u)$ sont uniformément continues sur la boule $B(\rho)$ si et seulement si :

$$\lim_{||v||=0} \sup_{||u|| \leq \rho} ||v||^{-1} ||\omega(u ; v)|| = 0 \tag{2-23}$$

et le :

THEOREME (A) *(théorème des fonctions inverses).*

Soient X et Y deux espaces de Banach, T un opérateur continûment différentiable sur un ouvert U de X dans Y . Si, pour un point x_o de U, la différentielle $DT(x_o)$ est un isomorphisme de X sur Y , l'opérateur T est alors un isomorphisme d'un voisinage ouvert de x_o sur son image.

Supposons que les opérateurs A et A_h soient continûment différentiables, sur les boules ouvertes U et U_h de rayon $\rho + \varepsilon$ et que

(2-24) les restrictions r_h et s_h soient stables.

$$\begin{cases} \text{i) Si } ||u_h||_h \leq K \text{ , il existe } M \text{ tel que } ||A_h(u_h)||_h \leq M \\ \text{ii) Si } ||u_h||_h \leq \rho + \varepsilon \text{ , il existe } M \text{ tel que } ||DA_h(u_h)v_h||_h \leq M||v_h||_h \\ \text{iii)} \lim_{\substack{||v_h||_h=0 \\ ||v_h||_h \leq M}} \sup_{||u_h||_h \leq \rho} ||v_h||_h^{-1} ||\omega_h(u_h ; v_h)||_h = 0 . \end{cases} \tag{2-25}$$

et qu'il existe $u_o \in U$ tel que $r_h u_o \in U_h$, $DA(u_o)$ et $DA_h(r_h u_o)$ soient inversibles et que

$$||DA_h^{-1}(r_h u_o) f_h||_h \leq c||f_h||_h \text{ pour tout } f_h \text{ de } F_h . \tag{2-26}$$

THEOREME 2-2.

Sous les hypothèses (2-24) , (2-25) *et* (2-26) , *il existe* γ_o *et* γ

strictement positifs tels que si :

$$(2\text{-}27) \qquad ||f - f_o|| < \gamma_o \quad ; \qquad ||f_h - f_{oh}||_h < \gamma \; ; \qquad (f_{oh} = A_h(r_h u_o))$$

il existe des solutions u *et* u_h *des équations :*

$$(2\text{-}28) \qquad A(u) = f \quad ; \quad A_h(u_h) = f_h$$

uniques dans un voisinage de u_o *et de* u_{oh} *respectivement.*

Si de plus

$$(2\text{-}29) \quad \begin{cases} \text{i) } \lim\limits_{h=0} ||s_h A(u) - A_h(r_h u)||_h = 0 \text{ pour tout } u \in U \\ \text{ii) } \lim\limits_{h=0} ||s_h f - f_h||_h = 0 \end{cases}$$

les solutions u_h *convergent discrètement vers la solution* u .

DEMONSTRATION.

Nous allons montrer que l'on peut utiliser le théorème A dans la situation suivante :

$$(2\text{-}30) \quad \begin{cases} X = \beta E_h \; , \; Y = \beta F_h \; , \; U = \beta' U_h \; , \; T = \beta A_h \\ x_o = \beta(r_h u_o) \quad ; \quad f_{oh} = A_h(r_h u_o) \end{cases}$$

Nous démontrerons ainsi en premier lieu que βA_h *est un isomorphisme d'un voisinage* βB_h *de* $\beta(r_h u_o)$ *sur une boule* βC_h *de centre* βf_{oh} *et de rayon* $\gamma > 0$ *convenable* , ce qui impliquera en particulier que les opérateurs A_h sont des isomorphismes de C_h sur B_h et que les opérateurs A_h^{-1} sont stables sur C_h .

D'après (2-25) i) , l'opérateur $\pi A_h = \beta A_h$ est un opérateur borné de βE_h dans βF_h et d'après (2-25) ii) , l'opérateur $\pi DA_h(\beta u_h) = \beta DA_h(\beta u_h)$ est un opérateur linéaire continu de βE_h dans βF_h d'après la proposition 2-2 du n° 2-3 .

De plus, l'application

$$(2\text{-}31) \quad \begin{cases} \beta u_h \longrightarrow \beta DA_h(\beta u_h) \\ \text{est bornée de } \beta B_h(\rho + \varepsilon) \text{ dans } L(\beta E_h , \beta F_h) \end{cases}$$

Enfin, l'hypothèse (2-25) iii) montre que :

$$(2\text{-}32) \qquad \lim_{||\beta v_h||=0} \; \sup_{||\beta u_h|| < \rho} ||\beta v_h||^{-1} \beta \omega_h(\beta u_h \; ; \; \beta v_h) = 0$$

Les opérateurs A_h étant différentiables, on déduit des relations

$A_h(u_h + v_h) = A_h(u_h) + DA_h(u_h)v_h + \omega_h(u_h ; v_h)$

et de ce qui précède que :

(2-33) $\beta A_h(\beta u_h + \beta v_h) = \beta A_h(\beta u_h) + \beta DA_h(\beta u_h)\beta v_h + \beta \omega_h(\beta u_h ; \beta v_h)$

et que $\beta DA_h(\beta u_h)$ est la différentielle de βA_h, qui est (uniformément) continue sur $\beta B_h(\rho)$ d'après le lemme (A),(2-31) et (2-32).

D'autre part, l'opérateur $\pi DA_h^{-1}(r_h u_o)$ est l'inverse (algébrique) de $\pi DA_h(r_h u_o)$. Mais, d'après (2-26), $\pi DA_h^{-1}(r_h u_o)$ est continu de βF_h sur βE_h, et par suite, la différentielle $\beta DA_h(r_h u_o)$ est un isomorphisme de βE_h sur βF_h. Il résulte alors du théorème (A) que βA_h est un isomorphisme d'un voisinage ouvert B de $\beta r_h u_o$ sur un voisinage ouvert C de $\beta f_{oh} = \beta A_h(r_h u_o)$.

De même, le théorème (A) appliqué dans le cas où $X = E$, $Y = F$, $U = U$, $T = A$, $x_o = u_o$ implique que A est un isomorphisme d'un voisinage B_1 de u_o sur une boule C_1 de centre f_o et de rayon δ_1.

La seconde partie du théorème 2-2 résulte du théorème 2-1 si l'on montre qu'il existe des voisinages B, B_h, C, C_h de u_o, $r_h u_o$, f_o et $f_{oh} = A_h(r_h u_o)$ tels que :

$$(2\text{-}34)\quad \begin{cases} A(B) = C \quad , \quad A_h(B_h) = C_h \ ; \\ r_h B \subset B_h \quad \text{et} \quad s_h C \subset C_h \ . \end{cases}$$

puisque nous avons démontré que les A_h^{-1} sont stables sur C_h et que nous avons supposé que les A_h sont consistants à A et que les f_h convergent discrètement vers f.

Tout d'abord, il existe $\gamma > 0$ tel que les boules C_h de centre f_{oh} et de rayon γ vérifient $\beta C_h \subset C$, puisque les produits de boules de même rayon forment un système fondamental de voisinages de βE_h.

Considérons $B_h = A_h^{-1}(C_h)$. Il nous reste à montrer qu'il existe B et C vérifiant (2-34).

Puisque les r_h sont stables, il existe un voisinage B_2 de u_o tel que $r_h B_2 \subset B_h$, puisque la stabilité des r_h est la continuité de l'opérateur πr_h de E dans πE_h.

Il existe alors δ_2 tel que $0 < \delta_2 \leq \delta_1$ et $A^{-1}C(f_o , \delta_2) \subset B_1 \cap B_2$.

Il existe d'autre part $\delta_3 > 0$ tel que $s_h C(f_o , \delta_3) \subset C_h(f_{oh} , \gamma)$ pour h assez petit.

En effet, les s_h étant stables, il existe δ_3 tel que :

$||f - f_o|| \leq \delta_3$ entraîne que $||s_h f - s_h f_o||_h \leq \frac{\gamma}{2}$

et il existe h_o tel que, d'après (2-29) i) ,

$||s_h f_o - f_{oh}||_h = ||s_h A(u_o) - A_h(r_h u_o)||_h \leq \frac{\gamma}{2}$ si $h < h_o$.

Donc, en prenant pour voisinage C la boule de centre f_o et de rayon $\gamma_o = \inf(\delta_2 , \delta_3)$ et pour voisinage B l'image réciproque $A^{-1}(C)$, les conditions (2-34) sont satisfaites, ce qui achève la démonstration du théorème.

Nous donnerons au §3 , n° 3-3 , Exemple 3-6 des exemples d'opérateurs A_h vérifiant les hypothèses du théorème 2 du §2 .

§3. APPROXIMATION DES OPERATEURS D'UN ESPACE DANS SON DUAL.

Soit A un opérateur d'un espace V dans son dual V' . Si on se donne une approximation $A_h(V)$, on prendra alors pour approximation de V' l'approximation duale de $A_h(V)$ (§1 , n° 1-5) . On fixe au n° 3-1 les notations (formulation variationnelle). On donne au n° 3-2 deux conditions suffisantes commodes pour que les opérateurs A_h^{-1} soient stables. On en déduit un théorème de convergence à l'aide du théorème 1 du §2. On considère ensuite l'application au cas des opérateurs linéaires coercifs et à une classe d'opérateurs non linéaires (exemples 3-1 et 3-2).

On montre au n° 3-3 que les restrictions d'un opérateur A sont, sous certaines conditions, consistantes à A , inversibles et que leurs inverses sont stables. On étudie de plus le comportement de l'erreur $u - p_h u_h$ dans divers espaces en fonction de l'erreur de troncature $u - p_h r_h u$.

Le n° 3-4 est consacré au cas où $A = \sum A_i$ est la somme d'opérateurs d'espaces V_i dans V'_i , où V est l'intersection des V_i . On se donne des approximations partielles des espaces V_i et on prend pour opérateur A_h la somme des restrictions des opérateurs A_i dans les approximations des espaces V_i . On obtient alors des résultat (moins forts) de convergence.

On considère au n° 3-5 la classe des opérateurs non linéaires, bornés, coercifs et monotones. Les conditions de stabilité ne sont pas satisfaites et nous n'obtenons qu'un théorème de convergence faible. Enfin, on considère au n° 3-6 l'approximation des solutions définies par le lemme des projections, utilisé pour démontrer l'existence des solutions des équations différentielles - opérationnelles.

On suppose connus les n° 1-1 à 1-5 du §1 et les n° 2-1 à 2-5 du §2.

Les exemples illustrant les résultats de ce § sont exposés au Chapitre II , §4 , et peuvent être abordés après la lecture des §2 et §3 du Chapitre II .

3-1. FORMULATION VARIATIONNELLE.

Dans tout ce paragraphe, V désignera un espace de Banach REFLEXIF , réel ou complexe, V' son (anti-)dual, (f , v) le produit scalaire mettant V et V' en dualité.

$||u||$ la norme de V ; $||f||_* = \sup_v ||v||^{-1} |(f , v)|$ sa norme duale.

Tout opérateur A de V dans V' est associé biunivoquement à une forme a(u ; v) sur V × V linéaire et continue en v de la manière suivante :

(3-1) $a(u ; v) = (A(u) , v)$.

Nous approcherons dans ce numéro les solutions du :

PROBLEME P .

Etant donné f *dans un sous-ensemble* D *de* V' , *chercher* u *dans un sous-ensemble* B *de* V *vérifiant :*

(3-2) $a(u ; v) = (f , v)$ *pour tout* v *de* V .

L'équation (3-2) est la formulation variationnelle de l'équation A(u) = f .

On se donne des approximations $A_h(V)$ de l'espace V et l'on conviendra de prendre pour approximation de l'espace V' l'approximation duale $A_h^*(V')$ de $A_h(V)$, définie par :

(3-3) $(p_h^* f_h , v) = (f_h , r_h v)$; $(r_h^* f , v_h)_h = (f , p_h v_h)$ (cf. §1 , n° 1-5).

En particulier, nous désignerons par :

(3-4) $\varepsilon(f , f_h) = ||r_h^* f - f_h||_{*h} = \sup ||v_h||_h^{-1} |(f , p_h v_h) - (f_h , v_h)_h|$

l'erreur discrète entre f et f_h .

Soit A_h un opérateur de V_h dans V'_h et $a_h(u_h ; v_h)$ sa forme associée :

(3-5) $a_h(u_h ; v_h) = (A_h(u_h) , v_h)_h$

Nous considérerons les :

PROBLEMES P_h .

Etant donné f_h *dans un sous-ensemble* D_h *de* V'_h , *chercher* u_h *dans un sous-*

ensemble B_h *de* V_h *vérifiant :*

(3-6) $a_h(u_h ; v_h) = (f_h , v_h)_h$ *pour tout* v_h *de* V_h .

Nous allons traduire sous forme variationnelle la consistance des opérateurs A_h à un opérateur A .

Nous poserons :

(3-7) $$\psi_u(h) = \sup_{v_h} ||v_h||_h^{-1} \, |a(u ; p_h v_h) - a_h(u_h ; r_h v)|$$

Les formules (3-3) et(3-5) montrent que $\psi_u(h) = ||A_h(r_h u) - r_h^{*} A(u)||_{*h}$

Dire que les opérateurs A_h *sont consistants à* A *sur* B (ou les formes $a_h(u_h ; v_h)$ consistantes à la forme $a(u ; v)$) *est dire que* $\lim_{h=0} \psi_u(h) = 0$ *pour tout* $u \in B$.

Nous supposerons que les opérateurs A et A_h sont surjectifs, c'est-à-dire que les problèmes P et P_h admettent des solutions. Nous allons donner des conditions suffisantes de stabilité des opérateurs A_h^{-1} :

3-2. CONDITIONS SUFFISANTES DE STABILITE DES OPERATEURS A_h^{-1} .

Nous poserons pour simplifier :

(3-8) $s_h(u_h , v_h) = a_h(u_h ; u_h - v_h) - a_h(v_h ; u_h - v_h)$

DEFINITION 3-1.

Nous dirons que les opérateurs A_h vérifient la *propriété* S_1 si :

S_1 { Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$, indépendant de h , tel que : $||u_h - v_h||_h \geqslant \varepsilon$ entraîne que $|s_h(u_h , v_h)| \geqslant \eta ||u_h - v_h||_h$.

Nous dirons que les opérateurs A_h vérifient la *propriété* S_2 si :

S_2 {
i) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ indépendant de h tel que :
$||u_h - v_h||_h \geqslant \varepsilon$ entraîne que $|s_h(u_h , v_h)| \geqslant \eta$
et si :
ii) Pour tout K , il existe R tel que :
$||u_h||_h \geqslant R$ entraîne que $a_h(u_h ; u_h) \geqslant K||u_h||$.

THEOREME 3-1.

Supposons les opérateurs A *et* A_h *surjectifs. Les solutions* u *et* u_h *vérifient :*

(3-9) $s_h(u_h , r_h u) \leq (\psi_u(h) + \varepsilon(f , f_h))||u_h - r_h u||$.

Si l'une des conditions S_1 *ou* S_2 *est vérifiée, les opérateurs* A_h *sont inversibles et les opérateurs* A_h^{-1} *sont stables sur toute boule de rayon* K . *Si de plus* $\psi_u(h)$ *et* $\varepsilon(f , f_h)$ *tendent vers* 0 , *les solutions* u_h *convergent discrètement vers la solution* u *du problème* P . *Enfin, les solutions* u_h *convergent vers* u *si les prolongements* p_h *sont stables et les approximations* $A_h(V)$ *convergentes.*

Les conditions S_1 et S_2 i) impliquent que les opérateurs A_h soient injectifs. Plus généralement, il suffit que si $u_h \neq v_h$, $s_h(u_h , v_h) > 0$.

En effet, si on suppose que $u_h \neq v_h$ et $A_h(u_h) = A_h(v_h)$, on aurait :

$$0 = s(u_h , v_h) > 0$$

ce qui est impossible.

Montrons que les opérateurs A_h^{-1} sont stables, c'est-à-dire que pour tout ε , il existe η_1 indépendant de h tel que, si $u_h = A_h^{-1}(f_h)$ et $v_h = A_h^{-1}(g_h)$:

(3-10) $||f_h - g_h||_{*h} \leq \eta_1$ entraîne que $||u_h - v_h||_h \leq \varepsilon$;

Supposons que S_1 soit vérifiée.Alors :

$$|s_h(u_h , v_h)| = |(f_h - g_h , u_h - v_h)_h| \leq \eta_1 ||u_h - v_h||_h$$

ce qui implique que $||u_h - v_h||_h \leq \varepsilon$. (en prenant $\eta_1 = \eta$).

Supposons que S_2 soit vérifiée et montrons que les A_h^{-1} sont stables sur les boules de rayon K donné dans V_h' .

D'après S_2 ii) , on sait qu'il existe R tel que si

$$a_h(u_h , u_h) = (f_h , u_h) \leq ||f_h||_h \, ||u_h||_h \leq K||u_h||_h$$

on ait $||u_h||_h \leq R$. Donc, pour tout ε , il existe η_1 tel que

$$|s_h(u_h , v_h)| \leq \eta_1 ||u_h - v_h||_h \leq 2 \eta_1 R = \eta$$

ce qui implique, d'après S_2 i) , que $||u_h - v_h||_h \leq \varepsilon$

Les autres assertions du théorème découlent alors du théorème 1 du §2 du n° 2-4 du §2 .

L'inégalité (3-9) est évidente : on ajoute et on retranche à $s_h(u_h , r_h u)$ l'expression $a(u ; p_h v_h) = (f , p_h v_h)$.

Enfin, la dernière partie du théorème résulte du théorème 1 du §1 .

REMARQUE 3-1.

La condition S_2 ii) implique en particulier que les opérateurs A_h sont surjectifs (cf. J. LERAY - J.L. LIONS [1] par exemple), si les espaces V_h sont de dimension finie. Si la condition S_2 est satisfaite, et si l'opérateur A est borné et continu de V fort dans V' faible, on en déduit que l'opérateur A est bijectif (cf. n° 3-4 , théorème 4 du §3).

L'opérateur A est bijectif (mais A^{-1} n'est plus continu et les A_h^{-1} ne sont plus stables) si l'on suppose seulement que $s(u , v) > 0$ (cf. n° 3-5).

Nous allons maintenant donner deux exemples de classes d'opérateurs A vérifiant les conditions de stabilité S_1 et S_2 .

EXEMPLE 3-1. OPERATEURS LINEAIRES COERCIFS.

Supposons que les formes $a_h(u_h , v_h)$ et $a(u , v)$ soient sesquilinéaires et globalement coercives :

(3-11) Il existe $c > 0$ tel que $|a_h(v_h , v_h)| \geqslant c||v_h||_h^2$ pour tout $v_h \in V_h$.

On sait alors (cf. Appendice) que les opérateurs A_h sont des isomorphismes de V_h sur V_h' . Il est clair, d'autre part, que les conditions de stabilité S_1 et S_2 sont vérifiées puisque :

$$|s_h(u_h , v_h)| = |a_h(u_h - v_h , u_h - v_h)| \geqslant c||u_h - v_h||_h^2$$

On en déduit le :

COROLLAIRE 3-1.

Si les formes sesquilinéaires $a_h(u_h , v_h)$ *sont globalement coercives et consistantes à une forme sesquilinéaire* $a(u , v)$ *coercive, les solutions* u_h *convergent discrètement vers la solution* u *si* $\varepsilon(f , f_h)$ *tend vers* 0 . *Les erreurs discrètes vérifient l'inégalité :*

$$(3\text{-}12) \qquad ||u_h - r_h u||_h \leqslant c^{-1}(\psi_u(h) + \varepsilon(f , f_h))$$

Sous des hypothèses légèrement différentes, le corollaire 3-1 a été démontré dans J. CEA [1] .

Supposons que V soit un espace de Hilbert contenu et dense dans un espace de Hilbert H, et soit $A = \{V , H , a(u , v)\}$ (cf. Appendice) l'isomorphisme du domaine $D(A)$, muni de la norme du graphe $[u] = (|u|^2 + |A u|^2)^{1/2}$, sur H. Nous allons approcher discrètement $u = A^{-1} f$ dans $D(A)$ lorsque f appartient à H.

Nous supposerons pour cela que les espaces V_h sont de dimension finie.

On considère les normes suivantes sur V_h.

$$(3\text{-}13) \quad | u_h |_h = (u_h , u_h)_h^{1/2} \quad ; \quad [u_h]_h = (|u_h|_h^2 + |A_h u_h|_h^2)^{1/2}$$

La norme $[u_h]_h$ est la norme du graphe de l'opérateur A_h.

THEOREME 3-2.

Supposons que les formes $a_h(u_h ; v_h)$ *et* $a(u , v)$ *soient globalement coercives et que*

$$(3\text{-}14) \quad \begin{cases} \text{i) } |u_h|_h \leq k \|u_h\|_h \text{ ; } k \text{ indépendante de } h . \\ \text{ii) } \begin{cases} \Psi_u(h) = \sup\limits_{v_h} |v_h|_h^{-1} |a(u , p_h v_h) - a_h(r_h u , v_h)| \\ \text{tend vers } 0 \text{ avec } h \text{ pour tout } u \in D(A) \end{cases} \\ \text{iii) } \begin{cases} \text{Si } f \in H , \hat{\varepsilon}(f , f_h) = \sup |v_h|_h^{-1} |(f , p_h v_h) - (f_h , v_h)_h| \\ \text{tend vers } 0 \text{ avec } h \end{cases} \end{cases}$$

Les solutions u_h *du problème* P_h *convergent discrètement vers* u *pour la norme* $[u_h]_h$:

$$(3\text{-}15) \quad [u_h - r_h u_h]_h \leq k_1 (\hat{\psi}_u(h) + \hat{\varepsilon}(f , f_h) \text{ tend vers } 0 \text{ avec } h :$$

Remarquons tout d'abord que sous les hypothèses du théorème 2 du §3, les inégalités suivantes sont satisfaites :

$$(3\text{-}16) \quad \begin{cases} \text{i) } k^{-1} \|u_h\|_{*h} \leq |u_h|_h \leq k \|u_h\|_h \leq k_1 [u_h]_h \\ \text{ii) } \psi_u(h) \leq k \hat{\psi}_u(h) \quad ; \quad \varepsilon(f , f_h) \leq k \hat{\varepsilon}(f , f_h) \end{cases}$$

La convergence discrète dans $D(A)$ entraîne alors la convergence discrète dans V.

Tout d'abord, il résulte de (3-16) et du corollaire 3-1 que u_h converge discrètement vers u dans H puisque :

$$|u_h - r_h u|_h \leq k^2 c^{-1} (\hat{\psi}_u(h) + \hat{\varepsilon}(f , f_h))$$

Montrons ensuite que :

$$|A_h(u_h - r_h u)|_h \leq \hat{\psi}_u(h) + \hat{\varepsilon}(f , f_h)$$

En effet :

$$|A_h(u_h - r_h u)|_h^2 = a_h(u_h - r_h u , A_h(u_h - r_h u)) =$$

$$= (f_h , A_h(u_h - r_h u))_h - (f , p_h A_h(u_h - r_h u)) +$$

$$+ a(u , p_h A_h(u_h - r_h u) - a_h(r_h u , A_h(u_h - r_h u))$$

$$\leq (\hat{\varepsilon}(f , f_h) + \hat{\psi}_u(h)) |A_h(u_h - r_h u)|_h$$

Si $k_1 = \sqrt{k^2 c^{-1} + 1}$, on en déduit l'inégalité (3-15).

REMARQUE 3-2.

En fait, le théorème 3-2 est un corollaire du théorème 2-1 du §2 n° 2-4 , puisque (3-14) ii) exprime la consistance des opérateurs A_h à A et puisque les opérateurs A_h^{-1} sont stables au sens suivant :

$$[A_h^{-1} f_h]_h \leq k_2 |f_h|_h \qquad ; \qquad k_2 = \sqrt{1 + k^2}$$

D'après le théorème 1-1 du §1 , la convergence discrète dans $D(A)$ entraîne la convergence forte dans $D(A)$ si :

$$(3\text{-}17) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad p_h V_h \subset D(A) \quad ; \quad |p_h u_h| \leq |u_h|_h \quad ; \quad |A\, p_h u_h| \leq |A_h u_h|_h \\ \text{ii)} \quad \lim_{h=0} ||u - p_h r_h u||_{D(A)} = 0 \quad \text{pour tout } u \text{ de } D(A) . \end{cases}$$

REMARQUE 3-3.

Puisque les espaces V_h sont de dimension finie, il existe une constante $S(h)$ telle que :

$$(3\text{-}18) \qquad ||u_h||_h \leq S(h) |u_h|_h \quad , \quad \lim_{h=0} S(h) = +\infty$$

Supposons que les opérateurs A_h soient stables, c'est-à-dire que :

$$(3\text{-}19) \qquad |a_h(u_h , v_h)| \leq M ||u_h||_h ||v_h||_h \quad ; \quad M \text{ indépendante de } h .$$

On en déduit les inégalités :

$$(3\text{-}20) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad [u_h]_h \leq (1 + M^2)^{1/2} S(h) ||u_h||_h \quad ; \quad S(h)^{-1} ||u_h||_h \leq |u_h|_h \leq S(h) ||u_h||_{*h} \\ \text{ii)} \quad \hat{\psi}_u(h) \leq S(h)\, \psi_u(h) \quad ; \quad \hat{\varepsilon}(f , f_h) \leq S(h)\, \varepsilon(f , f_h) \end{cases}$$

EXEMPLE 3-2.

Considérons des formes $b_h(u_h ; v_h , w_h)$ sur V_h , linéaires et continues en v_h et w_h ; supposons qu'il existe $c > 0$, $L > 0$ et $\rho > 0$ tels que :

$$(3\text{-}21)\begin{cases} \text{i)} \quad b_h(u_h ; v_h , v_h) \geqslant c||v_h||_h^2 \quad \text{si} \quad ||u_h||_h \leqslant \rho \\ \text{ii)} \quad |b_h(u_h^1 ; v_h, w_h) - b_h(u_h^2, v_h, w_h)| \leqslant L||u_h^1 - u_h^2||_h \, ||v_h||_h \, ||w_h||_h \end{cases}$$

et considérons la forme $a_h(u_h ; v_h)$ suivante :

$$(3\text{-}22) \qquad a_h(u_h ; v_h) = b_h(u_h ; u_h , v_h)$$

Si $\rho < c\, L^{-1}$, les conditions S_1 et S_2 de stabilité sont vérifiées sur les boules B_h^ρ de rayon ρ puisque, d'après (3-21) :

$$(3\text{-}23) \qquad (c - L\,\rho)\, ||u_h - v_h||_h^2 \leqslant s_h(u_h , v_h)$$

On déduit alors du théorème 3-1 le :

COROLLAIRE 3-2.

Supposons que $||f_h||_{*h} \leqslant R < c^2\, L^{-1}$, *que* $||r_h u||_h \leqslant ||u||$ *et que les formes* $a(u ; v)$ *et* $a_h(u_h ; v_h)$ *vérifient* (3-21) *et* (3-22) . *Il existe alors des solutions uniques* u *et* u_h *des problèmes* P *et* P_h *vérifiant* :

$$(3\text{-}24) \qquad ||u_h - r_h u||_h \leqslant (c - L\,\rho)^{-1} \, (\psi_u(h) + \varepsilon(f , f_h))$$

Remarquons tout d'abord que si une solution u_h du problème P_h existe et que si $||f_h||_{*h} \leqslant R$, alors $||u_h||_h \leqslant \rho = c^{-1} R$ puisque

$$(3\text{-}25) \qquad c||u_h||_h^2 \leqslant b_h(u_h ; u_h ; u_h) \leqslant (f_h , u_h) \leqslant R||u_h||_h$$

Il en résulte donc que si les solutions u et u_h existent, et si $\rho = c^{-1} R < c\, L^{-1}$, le corollaire 3-2 résulte du théorème 1 du §3 et de (3-23) . L'existence des solutions des problèmes P et P_h a été démontrée par J. CEA [3]: La méthode itérative :

$$b_h(u_h^{n-1} ; u_h^n , v_h) = (f_h , v_h)_h \quad \text{pour tout} \quad v_h \in V_h \quad ; \quad ||u_h^o|| \leqslant \rho$$

qui définit u_h^n à partir de u_h^{n-1} comme solution d'un problème linéaire est convergente. Ce résultat est un cas particulier du théorème 4-2 du §4 que nous démontrerons.

3-3. APPROXIMATION PAR LES RESTRICTIONS D'UN OPERATEUR. - ETUDE DE L'ERREUR.

Nous allons étudier l'approximation d'un opérateur A par ses restrictions et dégager un certain nombre de résultats supplémentaires que l'on obtient dans ce cas concernant en particulier le comportement de l'erreur.

Nous supposerons que :

$$(3\text{-}26)\quad \begin{cases} \text{Les espaces } V_h \text{ sont de dimension finie, les prolongements } p_h \text{ injectifs} \\ \text{et les approximations } A_h(V) \text{ convergentes.} \end{cases}$$

Nous prendrons alors :

$$(3\text{-}27)\quad \begin{cases} \text{i)} \quad ||u_h||_h = ||p_h u_h|| \\ \text{ii)} \quad (f_h\ ,\ v_h)_h = (f\ ,\ p_h v_h) \quad \text{(i.e. : } f_h = r_h^* f \text{ ou encore } \varepsilon(f\ ,\ f_h) = 0) \\ \text{iii)} \quad a_h(u_h\ ;\ v_h) = a(p_h u_h\ ;\ p_h v_h) \end{cases}$$

Remarquons que sous ces hypothèses, la convergence discrète dans V entraîne la convergence forte (théorème 1-1 du §1) et que la forme $a_h(u_h\ ,\ v_h)$ définie par (3-27) iii) est associée à la restriction $r_h^* A\, p_h$ de l'opérateur A (d'après (3-3) et (3-5)). D'après (3-26), on sait que ces restrictions $A_h = r_h^* A\, p_h$ sont consistantes à A .

Si la forme $a(u\ ;\ v)$ vérifie l'une des conditions S_1 ou S_2 , les formes $a_h(u_h\ ;\ v_h)$ les vérifient également, si bien que les opérateurs A_h^{-1} sont stables (lorsqu'on les suppose surjectifs). On déduit alors du théorème 3 - 1 que *les hypothèses* (3-26) *et* (3-27) *impliquent la convergence forte des solutions* u_h *des problèmes* P_h *(lorsqu'elles existent) vers la solution* u *du problème* P .

Il en résulte donc que la donnée d'approximations $A_h(V)$ *vérifiant* (3-26) *permet de construire des problèmes approchés dans des espaces de dimension finie, dont les solutions sont convergentes.*

Nous allons étudier l'évaluation du comportement de l'erreur entre les solutions u et u_h pour certaines classes d'opérateurs.

EXEMPLE 3-3. CAS DES OPERATEURS LINEAIRES COERCIFS.

Supposons que V soit un sous-espace dense d'un espace de Hilbert H et considérons le triplet $A = \{V\ ,\ H\ ,\ a(u\ ,\ v)\}$ (cf. Appendice).

Si les restrictions r_h sont linéaires, nous poserons :

$$(3\text{-}28)\quad \gamma(h) = \sup_{u \in D(A)} ||u||_{D(A)}^{-1}\ ||u - p_h r_h u||\ ;\ \gamma_*(h) = \sup_{u \in D(A^*)} ||u||_{D(A^*)}^{*1} ||u - p_h r_h u||$$

Nous allons étudier le comportement de l'erreur $u - p_h u_h$ dans les espaces V, H et dans les espaces d'interpolation $S(\theta ; V , H)$ entre V et H (cf. Appendice)

THEOREME 3-3.

Si la forme $a(u , v)$ *est sesquilinéaire, coercive et continue et si les hypothèses* (3-26) *et* (3-27) *sont satisfaites, il existe une constante* H_1 *indépendante de* h *telle que*

$$(3\text{-}29) \quad ||u - p_h u_h||_{S(\theta ; V, H)} \leq M_1 \gamma_*(h)^\theta \, ||u - p_h u_h|| \quad ; \quad 0 \leq \theta \leq 1$$

Si de plus $f \in H$, *alors* u *appartient à* $D(A)$ *et*

$$(3\text{-}30) \quad \begin{cases} \text{i)} \ ||u - p_h u_h|| \leq c^{-1} M \gamma(h) \, ||u||_{D(A)} \\ \text{ii)} \ ||u - p_h u_h||_{S(\theta ; V, H)} \leq M_2 \gamma(h) \, \gamma_*(h)^\theta \end{cases}$$

Posons pour simplifier $\varepsilon_h = u - p_h u_h$, $T_h = 1 - p_h r_h$, $T_h^* = 1 - p_h^* r_h^*$

On remarque alors que :

$$a(\varepsilon_h , v) = a(\varepsilon_h , T_h v) \quad \text{pour tout} \quad v \in D(A^*)$$

Donc les erreurs $\varepsilon_h = u - p_h v_h$ vérifient :

$$\varepsilon_h = A^{-1} T_h^* A \, \varepsilon_h$$

Mais A est un isomorphisme de V sur V' , de H sur $D(A^*)'$ et par suite, de $S(\theta ; V , H)$ sur $S(\theta ; V' , D(A^*)')$. D'autre part, T_h^* est un opérateur de V' dans V' avec une norme égale à 1 , de V' dans $D(A^*)'$ avec une norme égale à $\gamma_*(h)$ d'après (3-28), donc de V' dans $S(\theta ; V' , D(A^*)')$ avec une norme égale à $\gamma_*(h)^\theta$.

Donc $A^{-1} T_h^* A$ est un opérateur de V dans $S(\theta ; V , H)$ avec une norme égale à $M_1 \gamma_*(h)^\theta$, d'où (3-29).

Nous sommes donc ramenés à étudier la norme de l'erreur $u - p_h u_h$ dans l'espace V . Mais puisque

$$a(u - p_h u_h , u - p_h u_h) = a(u - p_h u_h , u - p_h r_h u)$$

on en déduit que :

$$(3\text{-}31) \quad ||u - p_h u_h|| \leq c^{-1} M ||u - p_h r_h u||$$

Si $f \in H$, on sait que u appartient à $D(A)$, l'inégalité (3-30) i) résulte alors de (3-31) et de (3-28) et l'inégalité (3-30) ii) résulte de (3-29) et de (3-30) i) .

REMARQUE 3-4.

L'inégalité (3-31) est vraie, *quelle que soit la restriction* r_h , linéaire ou non. On peut prendre en particulier pour restriction r_h la restriction de Tchebychev (cf. §1 , n° 1-9) (proposition 1-6) *qui minimise le second membre de l'inégalité* (3-31) : on en déduit que *l'erreur* $||u - p_h u_h||$ *est de l'ordre de la meilleure approximation de la solution* u *par les éléments de* $p_h V_h$.

Dans le théorème 2 du §3 , pour $\theta = 1$, on obtient

$$(3\text{-}32) \qquad |u - p_h u_h|_* \leq M_1 \gamma_*(h) ||u - p_h u_h|| \leq M_3 \gamma(h) \gamma_*(h)$$

EXEMPLE 3-4 (cf. Exemple 3-2)

Supposons que $a(u ; v) = b(u ; u , v)$ où la forme $b(u ; v , w)$ est linéaire et continue en v et w et où :

$$(3\text{-}33) \quad \begin{cases} \text{i)} & b(u ; v , v) \geq c||v||^2 \quad \text{si} \quad ||u|| < \rho \\ \text{ii)} & |b(u^1 ; v , w) - b(u^2 ; v , w)| \leq L||u^1 - u^2|| \; ||v|| \; ||w|| \\ \text{iii)} & |b(u ; v, w)| \leq M(u)||v|| \; ||w|| \end{cases}$$

Considérons alors l'équation :

$$(3\text{-}34) \qquad a_h(u_h ; v_h) = b(p_h u_h ; p_h u_h ; p_h v_h) = (f , p_h v_h) \quad \text{pour tout } v_h \text{ de } V_h .$$

PROPOSITION 3-1.

Si $\rho < c\, L^{-1}$, *les erreurs* $u - p_h u_h$ *entre les solutions* u *et* u_h *vérifient l'inégalité :*

$$(3\text{-}35) \qquad ||u - p_h u_h|| \leq (c - L\rho)^{-1} (M(u) + L\rho) \; ||u - p_h r_h u||$$

On remarque en effet, en utilisant les équations que :

$$b(u ; u - p_h u_h , u - p_h u_h) = b(u ; u ; u - p_h r_h u) - b(p_h u_h ; p_h u_h , u - p_h r_h u)$$
$$+ b(p_h u_h ; p_h u_h , u - p_h u_h) - b(u ; p_h u_h , u - p_h u_h).$$

En utilisant (3-33) et le fait que $||p_h u_h|| \leq c^{-1} R = \rho$, on en déduit l'inégalité :

$$(c - L\rho) \; ||u - p_h u_h||^2 \leq (M(u) + L\rho) \; ||u - p_h u_h|| \; ||u - p_h r_h u||$$

EXEMPLE 3-5. : ETUDE DE L'ERREUR LORSQUE A EST NON LINEAIRE :

PROPOSITION 3-2.

Supposons que (3-27) *soit vérifiée. Les erreurs* $u - p_h u_h$ *vérifient l'inégalité*

(3-36) $\quad s(u\ ;\ p_h u_h) \leqslant ||A(u) - A(p_h u_h)||_* \ ||u - p_h r_h u||$

Si A *est un opérateur Höldérien, on en déduit que :*

$$\frac{s(u\ ;\ p_h u_h)}{||u - p_h u_h||^{\theta}} \leqslant M||u - p_h r_h u||$$

EXEMPLE 3-6. RESTRICTIONS D'OPERATEURS DIFFERENTIABLES DE V DANS V'

Nous allons montrer que les restrictions $r_h^* A\, p_h$ d'un opérateur différentiable A vérifient, sous certaines conditions, les hypothèses du théorème 2-2 du §2 n° 2-7 .

Supposons que l'opérateur A soit différentiable sur une boule U de rayon $\rho + \varepsilon$ de V .

PROPOSITION 3-3.

Supposons que l'opérateur A *soit borné, que sa différentielle soit bornée sur* U *et que :*

$$\lim_{||v||=0} \ \sup_{||u|| \leqslant \rho} ||v||^{-1} ||\omega(u\ ;\ v)||_* = 0$$

Supposons qu'il existe u_o *de* U *tel que* $||r_h u_o|| \leqslant \rho$ *et tel que :*

$(DA\,(p_h r_h u_o)\ v\ ,\ v) \geqslant c||v||^2 \quad ; \quad c > 0$ *indépendante de* h .

Supposons enfin que (3-26) *et* (3-27) *aient lieu et que les restrictions* r_h *soient stables. Il existe* γ *tel que les solutions* u *et* u_h *des équations :*

$a(u\ ;\ v) = (f\ ,\ v) \quad ; \quad a(p_h u_h\ ,\ p_h v_h) = (f\ ,\ p_h v_h)$

existent dans un voisinage de u_o *et de* $r_h u_o$ *si* $||f - f_o||_* < \gamma$. *De plus,* $p_h u_h$ *converge vers* u *dans* V .

En effet, si l'opérateur A est différentiable, sa restriction $r_h^* A\, p_h$ est également différentiable et :

$$r_h^* A(p_h u_h + p_h v_h) = r_h^* A(p_h u_h) + r_h^* DA(p_h u_h) p_h v_h + r_h^* \omega(p_h u_h\ ;\ p_h v_h)$$

Puisque :

$$(DA(p_h r_h u_o)p_h v_h \ , \ p_h v_h) \geqslant c||p_h v_h||^2 \quad ; \quad c > 0 \ .$$

les différentielles $DA_h(r_h u_o) = r_h^* \, DA(p_h r_h u_o)p_h$ sont inversibles et leurs inverses sont stables.

L'opérateur A étant en particulier continu sur U, la consistance des restrictions $r_h^* A \, p_h$ à A est satisfaite. La proposition 3-3 est alors un corollaire du théorème 2-2 du n°2-7 du §2.

Si l'on prend $u_o = 0$, il suffit de supposer que :

$$(DA(0) \ v \ , \ v) \geqslant c||v||^2 \quad ; \quad c > 0 \ .$$

3-4. APPROXIMATION PAR LES RESTRICTIONS PARTIELLES D'UN OPERATEUR A.

Lorsque l'opérateur $A = \sum_{q,r} A_{qr}$ est la somme d'opérateurs A_{qr}, nous construirons des opérateurs A_{qr} dans des approximations partielles de l'espace V. Nous n'utiliserons pas de prolongements de V dans V_h, (nous n'aurons donc pas de notion de consistance), mais nous aurons un résultat de convergence sous des hypothèses moins fortes.

Supposons que l'espace V soit un sous-espace fermé de l'intersection d'une suite finie d'espaces V_r, que nous supposerons, pour simplifier, contenus et denses dans l'espace V_o.

Considérons des formes $a(u \ ; \ v)$ sur $V \times V$ de la forme suivante :

$$a(u \ ; \ v) = \sum_{q,r} a_{qr}(u \ ; \ v)$$

où les formes $a_{qr}(u \ ; \ v)$ sont définies sur $V_q \times V_r$, linéaires et continues sur V_r par rapport à v.

Donnons-nous des approximations partielles (§1 , n° 1-4) des espaces V_r dans des espaces de dimension finie V_h

$$A_h(V_r) = (V_r \ , \ V_h \ , \ p_h^r \ , \ r_h)$$

et nous supposerons que :

$$(3\text{-}37) \quad \begin{cases} \text{i) } ||u_h||_h = \left(\sum_r ||p_h^r \, u_h||_r^2 \right)^{1/2} \text{ est une norme de } V_h \\ \text{ii) les approximations } A_h(V_r) \text{ sont convergentes.} \end{cases}$$

Si $f \in V'$, f s'écrit (de manière non unique) :

$$f = \sum_r f_r \quad ; \quad f_r \in V'_r$$

Nous considérons le problème approché P_h suivant :

$$(3\text{-}38)\quad a_h(u_h\ ;\ v_h) = \sum_{q,r} a_{qr}(p_h^q\, u_h\ ;\ p_h^r\, v_h) = (f_h\ ,\ v_h)_h = \sum_r (f_r\ ,\ p_h^r\, v_h)$$

Nous dirons que la forme $a_h(u_h\ ,\ v_h)$ est la restriction de $a(u\ ;\ v)$ dans les approximations partielles $A_h(V_q)$.

Nous allons démontrer le :

THEOREME 3-4.

Supposons que

$$(3\text{-}39)\quad \begin{cases} \text{i) } \textit{Pour tout } \varepsilon > 0\ , \textit{ il existe } \eta > 0 \textit{ tel que} \\ \quad \sum_r ||u_r - v_r||_r^2 \geqslant \varepsilon \textit{ entraîne que } \left| \sum_{q,r} s_{qr}(u_r\ ,\ v_r) \right| \geqslant \eta \\ \text{ii) } \textit{Pour tout } K\ , \textit{ il existe } R \textit{ tel que} \\ \quad \sum_r ||u_r||_r^2 \geqslant R^2 \textit{ entraîne que } \sum_{q,r} a_{qr}(u_q\ ,\ u_r) \geqslant K\Big(\sum_r ||u_r||_r^2\Big)^{1/2} \\ \text{iii) } \sup_{||u||_r \leqslant \text{cste}} |a_{qr}(u\ ,\ v)| \leqslant c||v||_r \\ \text{iv) } a_{qr}(u\ ,\ v) \textit{ est continue sur } V_q \textit{ par rapport à } u\ . \end{cases}$$

Si l'hypothèse (3-37) *est vérifiée, les solutions* u_h *du problème* P_h *existent sont uniques, et convergent vers la solution* u *du problème* P *au sens suivant :*

$$(3\text{-}40)\quad \sum_r ||u - p_h^r\, u_h||_r^2 \quad \textit{tend vers } 0 \textit{ avec } h\ .$$

REMARQUE 3-5.

On peut, dans le théorème 4 du §3, affaiblir l'hypothèse (3-39) iv) et renforcer l'hypothèse (3-39) i) en les remplaçant respectivement par

(3-39)' i) : Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $\eta > 0$ tel que $\sum ||u_r - v_r||_r^2 \geqslant \varepsilon$

entraîne $\sum_{q,r} s_{qr}(u_r\ ,\ v_r) \geqslant \eta$

(3-39)' iv) $\lim_{\lambda \to 0} a_{qr}(u - \lambda u_o\ ,\ v) = a_{qr}(u\ ,\ v)$ pour tout v fixé.

On verra dans la démonstration que l'hypothèse (3-39)' iv) sert à montrer que la limite u_* d'une suite est solution de l'équation. L'hypothèse (3-39)'i) impliquant que les opérateurs sont monotones, le procédé de MINTY (cf. n° 3-5) permet d'aboutir au même résultat sous l'hypothèse (3-39)' iv).

Démonstration du théorème 4 du §3 .

Remarquons tout d'abord que les opérateurs A_h vérifient la condition de stabilité S_2 d'après (3-39) i) et ii). D'après la remarque 3-1 , les solutions u_h existent et sont uniques. De plus, de (3-39) ii) résulte que :

$$||u_h||_h^2 = \sum_r ||p_h^r u_h||_r^2 \leqslant \text{cste.}$$

En effet, si on fait $v_h = u_h$ dans (3-38), nous avons :

$$\frac{a_h(u_h ; u_h)}{||u_h||_h} \leqslant \left(\sum ||f_r||_{*r}^2 \right)^{1/2}$$

Si $||u_h||_h$ tendait vers l'infini, il en serait de même de $||u_h||_h^{-1} a_h(u_h, u_h)$ d'après (3-39) ii) , ce qui contredit l'inégalité précédente.

On peut donc extraire de h une sous-suite (encore notée h) de h telle que (par définition des approximations partielles)

$$\lim_{h = 0} p_h^r u_h = u_* \text{ dans } V_r \text{ faible, pour tout } r .$$

En fait, on déduit de (3-30) i) et iii) que $p_h^r u_h$ converge fortement vers u_* dans V_r puisque :

$$\sum_{q,r} s_{qr}(u_* , p_h^r u_h) = \sum_{q,r} a_{qr}(u_* , u_* - p_h^r u_h) + \sum_r (f_r , p_h^r u_h - p_h^r r_h u_*) +$$

$$+ \sum_{q,r} a_{qr}(p_h^q u_h , p_h^r r_h u_* - u_*)$$

Donc, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe η et h assez petits tels que :

$$\left| \sum_{q,r} s_{qr}(u_* , p_h^r u_h) \right| < \eta$$

ce qui entraîne que $\sum_r ||u_* - p_h^r u_h||_r^2 \leqslant \varepsilon$

On déduit alors de (3-39) iv) que u_* est solution du problème P en prenant $v_h = r_h v$ dans (3-38). Cette solution étant unique, on en déduit (3-40).

Les hypothèses (3-39) sont vérifiées en particulier si (cf. exemples 3-1 et 3-3, 3-2 et 3-4)

a) - Les formes $a_{qr}(u , v)$ sont sesquilinéaires continues sur $V_q \times V_r$ et vérifient :

(3-41) $$\sum_{q,r} a_{qr}(u_q , v_r) \geqslant c \sum_q ||u_q||_q^2 .$$

b)- $a(u ; v) = b(u ; u , v) = \sum_{q,r,s} b_{qrs}(u ; u , v)$

où les formes b_{qrs} sont définies sur $V_q \times V_r \times V_s$ et vérifient :

$$(3\text{-}42)\begin{cases} \text{i)} \ \sum_{r,s} b_{qrs}(u ; v_r , v_s) \geqslant c \sum_r ||v_r||_r^2 \\ \text{ii)} \ |b_{qrs}(u^1 ; v_r , v_s) - b_{qrs}(u^2 , v_r , v_s)| \leqslant L||u^1 - u^2||_q ||v_r||_r ||v_s||_s \end{cases}$$

On prendra alors :

$$a_h(u_h , v_h) = \sum_{q,r,s} b_{qrs}(p_h^q u_h ; p_h^r u_h , p_h^s v_h)$$

et les conclusions du théorème auront lieu si :

$$||f||_* \leqslant R \leqslant c^2 L^{-1} .$$

Les applications des résultats du début de ce paragraphe sont exposées au n° 4-2 du §4 du chapitre II.

3-5. APPROXIMATION FAIBLE DES OPERATEURS MONOTONES.

Le théorème 1 du §3 assure l'unicité des solutions du problème P sous des hypothèses assez fortes pour entraîner en plus, la convergence forte des solutions des opérateurs approchés. Sous des hypothèses moins fortes, J. LERAY et J.L. LIONS [1] , F. BROWDER , G. MINTY , V. VISIK ont démontré un théorème d'existence. Nous allons obtenir dans ce cas la convergence faible des solutions des problèmes approchés : nous supposerons que ces opérateurs sont monotones, coercifs, bornés et continus des droites de V dans V' faible. Nous utiliserons ce théorème au n° 4-3 du §4 du chapitre II.

THEOREME 3-5.

Sous les hypothèses suivantes :

(3-43) A *est borné et* $\lim_{\lambda=0} a(u - \lambda w ; v) = a(u ; v)$

$$(3\text{-}44)\begin{cases} \text{i)} \ a_h(u_h , v_h) \geqslant 0 \quad (s(u , v) \geqslant 0) \qquad \textit{(monotonie)} \\ \text{ii)} \ \lim_{||u_h||_h = \infty} ||u_h||_h^{-1} \ a_h(u_h , u_h) = \infty \quad \textit{(coercivité)} \end{cases}$$

$$(3\text{-}45)\begin{cases} \text{i)} \ \textit{Les espaces } V_h \textit{ sont de dimension finie, les prolongements } p_h \textit{ stables, les approximations } A_h(V) \textit{ convergentes.} \\ \text{ii)} \ \lim \psi_u(h) = 0 \ ; \ \lim \varepsilon(f , f_h) = 0 \end{cases}$$

On peut extraire de la suite $p_h u_h$ *une sous-suite faiblement convergente vers une solution* u_* *du problème* P .

REMARQUE 3-6.

Si l'on suppose que $s_h(u_h , v_h) > 0$ et $s(u , v) > 0$. les solutions u et u_h des problèmes P et P_h sont uniques. Le théorème 3 - 5 implique alors que $p_h u_h$ converge faiblement vers u .

DEMONSTRATION.

Tout d'abord, $||p_h u_h||$ est borné d'après (3-44) ii) : si $||u_h||_h$ tendait vers l'infini, on aurait :

$$\lim_{||u_h||_h = \infty} ||u_h||_h^{-1} a_h(u_h , u_h) \leqslant ||f_h||_{*h} \leqslant K$$

ce qui est contradictoire. Désignons par u_* la limite faible d'une sous-suite extraite encore notée $p_h u_h$ et montrons que u_* est solution du problème P .

Nous avons, si v est un élément arbitraire de V :

$$0 \leqslant s_h(u_h , r_h v) = (f , p_h(u_h - r_h v)) - a(v ; p_h u_h - p_h r_h v) + a(v ; p_h(u_h - r_h v))$$
$$- a_h(r_h v , u_h - r_h v) + (f_h , u_h - r_h v)_h - (f , p_h(u_h - r_h v))$$

Nous pouvons donc passer à la limite où nous obtenons (d'après (3-45) ii)) :

$$0 \leqslant \lim_{h=0} s_h(u_h , r_h v) = (f - A(v) , u_* - v)$$

Nous utilisons maintenant un procédé dû à G. MINTY :

Soit $\lambda > 0$ et w un élément arbitraire de V ; posons $v = u_* - \lambda w$. On déduit alors de l'inégalité précédente que :

$$(f - A(u_* - \lambda w) , w) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } w \text{ fixé dans } V .$$

Faisons tendre λ vers 0 . D'après (3-43), nous obtenons :

$$(f - A(u_*) ; w) \geqslant 0 \quad \text{pour tout } w \text{ dans } V .$$

Cela entraîne que $A(u_*) = f$, ce qui achève la démonstration du théorème.

APPROXIMATIONS PAR LES RESTRICTIONS PARTIELLES DE A (cf. n°3-4).

Supposons que les conditions (3-37) et (3-38) aient lieu et que

(3-46) i) $$\sup_{||u||_q \leqslant M} |a_{qr}(u ; v)| \leqslant c||v||_r$$

$$
(3\text{-}46)\quad
\begin{cases}
\text{ii)} & \lim_{\lambda=0} a_{qr}(u - \lambda v\ ;\ w) = a_{qr}(u\ ,\ w) \\
\text{iii)} & \lim \sum ||u_q||_q^2 = \infty \qquad \left(\sum_q ||u_q||_q^2\right)^{-1/2} \sum_{q,r} a_{qr}(u_q\ ,\ u_r) = \infty \\
\text{iv)} & \sum_{q,r} s_{qr}(u_q\ ,\ v_r) \geq 0
\end{cases}
$$

PROPOSITION 3-4.

Sous les hypothèses (3-37), (3-38), et (3-46) *on peut extraire des sous-suites de* $p_h^q u_h$ *convergeant faiblement vers une solution* u_* *dans* V_q *pour tout* q .

La démonstration est analogue à la précédente. On établit tout d'abord que $||u_h||_h^2 = \sum_q ||p_h^q u_h||_q^2$ est borné. Par définition, des approximations partielles (§1 , n° 1-4), il existe alors un élément u_* de V tel que $u_* = \lim_{h=0} p_h^q u_h$ dans V_q faible pour tout q . On utilise enfin le procédé de Minty pour montrer que u_* est solution du problème : si v est fixé dans V , alors :

$$0 \leq \sum_{q,r} a_{qr}(p_h^q u_h\ ;\ p_h^r u_h - v) - a_{qr}(v\ ;\ p_h^r u_h - v)$$

Puisque $\sum_{q,r} a_{qr}(p_h^q u_h\ ;\ p_h^r u_h) = \sum_r (f_r\ ,\ p_h^r u_h)$, on en déduit, par passage à la limite, que

$$\sum_{q,r} (f_r - A_{qr}(v)\ ,\ u_* - v) \geq 0 \quad \text{pour tout } v \text{ de } V .$$

Il en résulte alors, comme précédemment, que

$$\sum_{q,r} A_{qr}(u_*) = \sum_r f_r$$

3-6. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DEFINIES PAR LE LEMME DES PROJECTIONS.

Rappelons l'énoncé du lemme des projections, qui est un critère permettant d'affirmer qu'un opérateur linéaire est surjectif. (cf. J.L. LIONS , [1] , chap. 3).

Nous nous plaçons dans la situation suivante. On se donne

a) un espace de Hilbert V , muni du produit scalaire $< u,v >$ et de la norme $||u||_V$

b) un espace prehilbertien Φ , contenu dans V avec une topologie plus fine, muni du produit scalaire $(((\phi, \psi)))$:

$$||\phi||_V \leq k|||\phi||| = (((\phi , \phi)))^{1/2}$$

c) une forme sesquilinéaire $E(u , \phi)$ sur $V \times \Phi$ vérifiant :

$$(3\text{-}47)\quad \begin{cases} \text{i)} & u \to E(u , \phi) \text{ est continu sur } V \\ \text{ii)} & \text{Re } E(\phi , \phi) \geq c|||\phi|||^2 \quad ; \quad c > 0 \quad ; \quad \phi \in \Phi \end{cases}$$

d) une forme $F(\phi)$ continue sur Φ

On considère alors le :

PROBLEME P. *Chercher* u *dans* V *vérifiant :*

$$(3\text{-}48)\quad E(u , \phi) = F(\phi) \qquad \textit{pour tout } \phi \textit{ de } \Phi .$$

Le lemme des projections affirme alors qu'il existe au moins une solution u du problème P (cf. démonstration du théorème 3-6).

Donnons-nous des approximations $A_h(V)$ et $A_h(\Phi)$ des espaces V et Φ :

$$(3\text{-}49)\quad \begin{cases} \text{i)} & A_h(V) = (V , V_h , p_h , r_h) \\ \text{ii)} & A_h(\Phi) = (\Phi , \Phi_h , p_h , s_h) \quad ; \quad \Phi_h \subset V_h \\ \text{iii)} & ||\phi_h||_h \leq k|||\phi_h|||_h \quad \text{pour tout } \phi_h \text{ de } \Phi_h \end{cases}$$

Donnons ensuite des formes $E_h(u_h , \phi_h)$ sur $V_h \times \Phi_h$ telles que

$$(3\text{-}50)\quad \begin{cases} \text{i)} & u_h \to E_h(u_h , \phi_h) \text{ est continue sur } V_h \\ \text{ii)} & \text{Re } E_h(\phi_h , \phi_h) \geq c|||\phi_h|||_h \quad ; \quad c > 0 . \end{cases}$$

et des formes F_h sur Φ_h telles que $|F_h(\phi_h)| \leq c_1|||\phi_h|||_h$

Considérons alors le :

PROBLEME P_h . *Chercher* u_h *dans* V_h *vérifiant :*

$$(3\text{-}51)\quad E_h(u_h , \phi_h) = F_h(\phi_h) \qquad \textit{pour tout } \phi_h \textit{ de } \Phi_h .$$

Il existe au moins une solution u_h du problème P_h .

Remarquons aussi que les formes $E_h(u_h , \phi_h) = E(p_h u_h , p_h \phi_h)$ vérifient (3-49) si $||\phi_h||_h = ||p_h\phi_h||$ et $|||\phi_h|||_h = |||p_h\phi_h|||$.

THEOREME 3-6.

Sous les hypothèses (3-47) *à* (3-50) , *il existe des solutions particulières du problème* P_h *telles que :*

$$(3\text{-}52) \qquad ||p_h u_h|| \leq M |||F_h|||_h \qquad \textit{(stabilité)}$$

Si

$$(3\text{-}53) \quad \begin{cases} \text{i) } \lim\limits_{h=0} \sup\limits_{\phi_h} |||\phi_h|||_h^{-1} \, |E(u\ ,\ p_h\phi_h) - E_h(r_h u\ ,\ \phi_h)| = 0 \\ \text{ii) } \lim\limits_{h=0} \sup\limits_{\phi_h} |||\phi_h|||_h^{-1} \, |F_h(\phi_h) - F(p_h\phi_h)| = 0 \end{cases}$$

Les solutions u_h *convergent discrètement vers une solution* u *du problème* P.

Si

$$(3\text{-}54) \quad \begin{cases} \text{i) } \lim\limits_{h=0} \sup\limits_{v_h} ||u_h||_h^{-1} \, |E(p_h u_h\ ,\ \phi) - E_h(u_h\ ,\ s_h\phi)| = 0 \\ \text{ii) } \lim\limits_{h=0} |F(\phi) - F_h(s_h\phi)| = 0 \\ \text{iii) } ||p_h u_h|| \leq M_1 ||u_h||_h \quad ; \quad |||F_h|||_h < M_2 \end{cases}$$

On peut extraire une sous-suite de $p_h u_h$ *convergeant faiblement vers une solution* u *de* E .

Nous allons tout d'abord établir (3-52) . La forme $E_h(u_h\ ,\ \phi_h)$ étant continue par rapport à u_h , elle définit un opérateur A_h de ϕ_h dans V_h (identifié à son dual) par

$$(3\text{-}55) \qquad E_h(u_h\ ,\ \phi_h) = < u_h\ ,\ A_h\phi_h >_h \quad ; \quad u_h \in V_h \ .$$

Posons $\Psi_h = A_h \Phi_h$.

On déduit de (3-50) ii) que A_h est injective et que A_h^{-1} , définie de Ψ_h sur Φ_h , est continue : en effet, si $\psi_h = A_h \phi_h$,

$$c|||\phi_h|||_h^2 = c|||A_h^{-1} \psi_h|||_h^2 \leq \text{Re } E_h(\phi_h\ ,\ \phi_h)$$
$$= \text{Re} < \phi_h\ ,\ A_h \phi_h >_h \leq ||\phi_h||_h \ ||\psi_h||_h$$

d'où l'on déduit que si $A_h \phi_h = 0$, $\phi_h = 0$ et

$$(3\text{-}56) \qquad |||A_h^{-1} \phi_h|||_h \leq k \, c^{-1} ||\phi_h||_h$$

L'opérateur A_h^{-1} se prolonge par continuité de l'adhérence $\overline{\Psi}_h$ de Ψ_h dans

V_h . Puisque V_h est un espace de Hilbert, il existe un projecteur orthogonal π_h de V_h sur $\overline{\Psi}_h$, de norme 1 .

On pose alors, si $\hat{\Phi}_h$ est le complété de Φ_h :

(3-57) $T_h^* = A_h^{-1} \pi_h$; $|||T_h^* v_h|||_h \leq k\, c^{-1} ||v_h||_h$.

D'autre part, l'équation (3-51) s'écrit :

$< u_h , v_h >_h = F_h(A_h^{-1} v_h)$ pour tout v_h de Ψ_h .

Donc toute solution de l'équation :

(3-58) $< u_h , v_h >_h = F_h(A_h^{-1} \pi_h v_h) = F_h(T_h^* v_h)$ pour tout v_h de V_h est en particulier solution de (3-51).

En désignant par T_h l'adjoint de T_h^* , on en déduit que

(3-59) $u_h = T_h F_h$ dans V_h

est une solution particulière du problème P_h . La norme de T_h étant bornée, on en déduit (3-52).

Considérons la solution $u = T F$ dans V du problème P . Les erreurs discrètes $u_h - r_h u$ vérifient l'équation :

(3-60) $E_h(u_h - r_h u , \phi_h) = G_h(\phi_h)$

où

$G_h(\phi_h) = F_h(\phi_h) - F(p_h \phi_h) + E(u , p_h \phi_h) - E_h(r_h u , \phi_h)$

Les hypothèses (3-53) entraînent que $|||G_h|||_h$ tend vers 0 , ce qui implique que :

$||u_h - r_h u||_h = ||T_h G_h||_h \leq M|||G_h|||_h$ tend vers 0 avec h .

Supposons (3-54). Puisque $|||F_h|||_h$ est borné, $||u_h||_h$ l'est également, et par suite $||p_h u_h||_h$ est dans un borné de V . On peut extraire une sous-suite faiblement convergente vers u_* dans V . Puisque :

$E(p_h u_h , \phi) = E(p_h u_h , \phi) - E_h(u_h , s_h \phi) + F_h(s_h \phi)$

On en déduit que $E(u_* , \phi) = F(\phi)$ pour tout ϕ de Φ.

Nous donnerons des applications de ce numéro au n° 5-3 du §5 du chapitre II, pour construire des schémas à plusieurs niveaux des équations paraboliques.

§4. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES INEQUATIONS VARIATIONNELLES.

On définit au n° 4-1 le problème et on établit au n° 4-2 plusieurs résultats

d'approximation.

On suppose connu le §3 dans son ensemble. Les applications de ce numéro sont exposées au n° 4-4 du §4 du Chapitre II .

4-1. POSITION DU PROBLEME.

Donnons-nous un ensemble convexe fermé K de V (réel) et une forme $a(u ; v)$ sur $V \times V$ linéaire et continue en v . Si f appartient à V' , on considère dans ce paragraphe le :

PROBLEME P .

Chercher u *dans* K *solution de l'inéquation variationnelle*

(4-1) $a(u ; u - v) \leq (f , u - v)$ *pour tout* v *de* K .

Si K est un cône convexe fermé, l'inéquation (4-1) est équivalente à :

$$(4\text{-}2)\quad \begin{cases} a(u ; v) = (A(u) , v) \geqslant (f , v) \quad \text{pour tout } v \text{ de } K . \\ a(u ; u) = (A(u) , u) = (f , u) \end{cases}$$

Si K est une variété linéaire affine de V , l'inéquation (4-1) est une équation. Si $K = V$, on retrouve les problèmes abordés au paragraphe précédent.

Si la forme $a(u , v)$ est bilinéaire, symétrique et coercive et V un espace de Hilbert, la solution u est la projection de f sur le cône K (lorsque V est muni du produit scalaire $a(u , v)$) ou encore l'élément u qui minimise la fonctionnelle $a(v , v) - 2(f , v)$ sur K .

Si la forme $a(u ; v)$ n'est pas symétrique, le théorème d'existence d'une solution u est dû à G. STAMPACCHIA [1] [2]. Si la forme $a(u ; v)$ est monotone, coercive et bornée, le théorème d'existence a été démontré par P. HARTMAN et G. STAMPACCHIA [1] .

Donnons-nous maintenant des approximations $A_h(V)$ de V , une forme $a_h(u_h ; v_h)$ sur V_h , et un ensemble convexe fermé K_h de V_h . On considère le :

PROBLEME P_h .

Chercher u_h *dans* K_h *solution de l'inéquation variationnelle :*

(4-3) $a_h(u_h ; u_h - v_h) \leq (f_h , u_h - v_h)_h$ *pour tout* v_h *de* K_h .

Rappelons que nous avons posé :

$$\varepsilon(f\ ,\ f_h) = \sup_{v_h} ||v_h||_h^{-1}\ |(f\ ,\ p_h v_h) - (f_h\ ,\ v_h)_h|$$

$$\psi_u(h) = \sup_{v_h} ||v_h||_h^{-1}\ |a(u\ ;\ p_h v_h) - a_h(r_h u\ ;\ v_h)|$$

$$s_h(u_h\ ,\ v_h) = a_h(u_h\ ;\ u_h - v_h) - a_h(v_h\ ;\ u_h - v_h)$$

4-2. THEOREMES DE CONVERGENCE.

THEOREME 4-1.

Supposons que les problèmes P *et* P_h *admettent des solutions dans* $K^\rho = K \cap B(\rho)$ *et* $K_h^\rho = K_h \cap B_h(\rho)$ *respectivement, où* $B_h(\rho)$ *est la boule de rayon* $\rho > 0$.

Supposons en outre que

(4-4) $\quad p_h\ K_h \subset K \quad ; \quad r_h\ K^\rho \subset K_h^\rho$

Les erreurs discrètes vérifient les inégalités

$$s_h(u_h\ ,\ r_h u) \leqslant (\psi_u(h) + \varepsilon(f\ ,\ f_h))||u_h - r_h u||_h + ||f - A(u)||_* \ ||u - p_h r_h u||$$

Si les opérateurs A_h *vérifient la condition de stabilité* S'_2

(4-5)
- i) *Pour tout* ε , *il existe* η *tel que* $||u_h - v_h||_h \geqslant \varepsilon$ *entraîne* $s_h(u_h\ ,\ v_h) \geqslant \eta$

  Il existe u_o *dans* K^ρ *tel que :*
- ii) $\lim_{||u_h||_h \to \infty} \dfrac{s_h(u_h\ ,\ r_h\ u_o)}{||u_h - r_h\ u_o||} = \infty$ *uniformément en* h .

et si

(4-6) $\lim_{h=0} \varepsilon(f\ ,\ f_h) = 0 \quad ; \quad \lim_{h=0} \psi_u(h) = 0$ *pour tout* u *de* K^ρ

(4-7) $\lim_{h=0} ||p_h r_h u - u|| = 0 \quad ; \quad ||p_h u_h|| \leqslant M||u_h||_h$

Les solutions u_h *du problème* P_h *sont uniques et convergent vers la solution* u *du problème* P .

DEMONSTRATION

Puisque d'après (4-4) , $r_h u \in K_h^\rho$ et $p_h u_h \in K$, on déduit (4-5) de l'inégalité :

$$s_h(u_h , r_h u) \leqslant a(u ; p_h(u_h - r_h u)) - a_h(r_h u ; u_h - r_h u)$$
$$+ (f_h , u_h - r_h u)_h - (f , p_h(u_h - p_h r_h u))$$
$$+ (f , u - p_h r_h u) - a(u ; u - p_h r_h u)$$

Puisque, d'après (4-1) et (4-3), $a_h(u_h ; u_h - r_h u) \leqslant (f_h , u_h - r_h u)_h$ et $a(u ; u - p_h u_h) - (f , u - p_h u_h) \leqslant 0$

D'autre part, on déduit de la deuxième partie de la condition de stabilité S'_2 que

$$||u_h||_h \leqslant K$$

puisque, si $||u_h||_h$ tendait vers l'infini, alors $s_h(u_h , r_h u_o)\ ||u_h - r_h u_o||$ tendrait vers l'infini, ce qui contredit le fait que

$$s_h(u_h , r_h u_o) \leqslant (f_h , u_h - r_h u_o) \leqslant ||f_h||_{*h}\ ||u_h - r_h u_o||$$

Donc, en particulier $||u_h - r_h u||_h$ est borné. On en déduit la convergence discrète en utilisant la convergence discrète de f_h vers f , la consistance des opérateurs A_h à A , la convergence des approximations $A_h(V)$ et la première partie de la condition de stabilité S'_2 .

De plus, les solutions u_h sont uniques : sinon, si $\varepsilon = ||u_h - v_h||_h \neq 0$ et si u_h et v_h vérifient (4-3), on aurait, d'après (4-5) :

$$0 = s_h(u_h , v_h) \geqslant \eta\ ||u_h - v_h||_h \quad ; \quad \eta > 0$$

ce qui est contradictoire.

Si on suppose de plus que les prolongements sont stables, on obtient la convergence forte de $p_h u_h$ vers u dans V , et par suite, l'unicité de la solution du problème P .

EXEMPLE 4-1. - INEQUATIONS A COEFFICIENTS LINEAIRES :

COROLLAIRE 4-1.

Si les formes $a_h(u_h , v_h)$ *et* $a(u , v)$ *sont bilinéaires et globalement coercives, les solutions* u_h *convergent discrètement vers* u *sous les hypothèses* (4-4) , (4-6) *et* (4-7) *et vérifient l'inégalité :*

$$(4\text{-}8)\quad ||u_h - r_h u||_h^2 \leqslant c^{-1}\left[(\psi_u(h) + \varepsilon(f , f_h))^2 c^{-1} + 2||f - A(u)||_*\,||u - p_h r_h u||\right]$$

Si $a_h(u_h , v_h) = a(p_h u_h , p_h v_h)$ *et* $(f_h , v_h)_h = (f , p_h v_h)$, *les erreurs* $u - p_h u_h$ *obéissent à la majoration :*

$$(4\text{-}9) \quad ||u - p_h u_h||^2 \leq (||f - A(p_h u_h)||_* \, ||u - p_h r_h u||)$$

Considérons de plus le cas où A_h est la somme des restrictions partielles d'un opérateur A (cf. §3 , n° 3-4). On suppose que :

$$\begin{cases} a(u , v) = \sum\limits_{q,r} a_{qr}(u , v) \quad ; \quad |a_{qr}(u , v)| \leq M||u||_q \, ||v||_r \\ \sum a_{qr}(u_q , u_r) \geq c \sum\limits_r ||u_r||_r^2 \quad ; \quad c > 0 . \end{cases}$$

On se donne des approximations $A_h(V_r)$ de V_r dans des espaces de dimension finie V_h telles que :

$$(4\text{-}10) \quad \begin{cases} \text{i) } ||u_h||_h = (\sum\limits_r ||p_h^r u_h||_r^2)^{1/2} \text{ est une norme de } V_h \\ \text{ii) Si } u_h \in K_h \text{ et si } p_h^r u_h \text{ converge faiblement vers } u_r \text{ dans } V_r \\ \quad \text{pour tout } r \text{ , alors } u_r = u \text{ appartient à } K . \\ \text{iii) } \lim\limits_{h=0} ||p_h^r r_h u - u||_r = 0 \text{ pour tout } u \text{ de } K \text{ et pour tout } r . \\ \text{iv) } r_h K \subset K_h \end{cases}$$

Considérons l'inéquation variationnelle :

$$\sum_{q,r} a_{qr}(p_h^q u_h , p_h^r u_h - p_h^r v_h) \leq \sum_r (f_r , p_h^r u_h - p_h^r v_h) \; ; \; v_h \in K_h$$

On démontre alors le

COROLLAIRE 4-2.

Sous l'hypothèse (4-10) , *les solutions* u_h *convergent vers la solution* u *au sens suivant :*

$$\lim_{h=0} \sum ||u - p_h^r u_h||_r^2 = 0$$

EXEMPLE 4-2. (*cf. Exemple 3-2 du §3 , n° 3-3*).

Considérons les formes $b_h(u_h ; v_h , w_h)$ sur V_h , linéaires et continues en v_h et w_h , vérifiant :

$$(4\text{-}11) \quad \begin{cases} \text{i) } b_h(u_h ; v_h , w_h) \geq c||v_h||_h^2 \text{ si } u_h \text{ appartient à } K_h^0 \\ \text{ii) } |b_h(u_h^1 ; v_h , w_h) - b_h(u_h^2 ; v_h , w_h)| \leq L||u_h^1 - u_h^2||_h ||v_h||_h ||w_h||_h . \end{cases}$$

et considérons la forme :

(4-12) $a_h(u_h ; v_h) = b_h(u_h ; u_h , v_h)$

Supposons aussi qu'il existe $u_h^o \in K_h^\rho$ tel que :

(4-13) $|b_h(u_h^o ; u_h^o , v_h)| \leq M||v_h||_h$; M indépendante de v_h .

On considère alors la méthode itérative suivante :

PROBLEME P_h^n .

Chercher u_h^n *dans* K_h^ρ *vérifiant :*

(4-14) $b_h(u_h^{n-1} ; u_h^n , u_h^n - v_h) \leq (f_h , u_h^n - v_h)_h$ *pour tout* v_h *de* K_h .

THEOREME 4-2.

Sous les hypothèses (4-4) , (4-6) , (4-7) ,(4-11) , (4-12) *et* (4-13) , *si* $\rho < c\, L^{-1}$, $||f_h||_{*h} \leq c\,\rho$ *et si* 0 *appartient à* K , *les problèmes* P_h^n , P_h *et* P *admettent des solutions uniques* u_h^n , u_h *et* u *dans* K_h^ρ *et* K . *Les solutions* u_h^n *convergent discrètement vers* u *quand* h *et* n^{-1} *tendent vers* 0 .

(4-15)
$$\left\{ \begin{array}{l} ||u_h^{n+1} - r_h u||_h^2 \leq (c - L\,\rho)^{-2} \left(\psi_u(h) + \varepsilon(f , f_h) + N\,L\,\rho\,\theta^n\right)^2 + \\ \qquad + 2(c - L\,\rho)^{-1}\, ||f - A(u)||_* \, ||u - p_h r_h u|| \end{array} \right.$$

où $\theta = c^{-1} L\,\rho < 1$

Si u_h^n *sont les solutions de l'inéquation restriction :*

(4-16) $b(p_h u_h^{n-1} ; p_h u_h^n ; p_h(u_h^n - v_h)) \leq (f , p_h(u_h^n - v_h)) \;\forall\; v_h \in K_h$

Les erreurs vérifient l'inégalité :

(4-17)
$$\left\{ \begin{array}{l} ||u - p_h u_h^{n+1}||_h^2 \leq 2(c - L\,\rho)^{-1} ||f - B(p_h u_h^n ; p_h u_h^{n+1})||_* ||u - p_h r_h u|| + \\ \qquad + (c - L\,\rho)^{-2}\, N^2\, \theta^{2n} \end{array} \right.$$

Le corollaire 3-2 du §3 est un cas particulier de ce théorème. Nous savons déjà que la condition S' est satisfaite puisque :

(4-18) $s_h(u_h , v_h) \geq (c - L\,\rho)||u_h - v_h||_h^2$

Nous en déduisons donc l'unicité des solutions des problèmes P_h^n , P_h et P .

a) LES SOLUTIONS u_h^n , u_h ET u APPARTIENNENT NECESSAIREMENT A K_h^ρ ET A K^ρ .

En faisant $v_h = 0$ dans les inéquations (4-14) , on obtient :

(4-19) $\quad ||u_h^n||_h \leq c^{-1}||f_h||_{*h} \leq c^{-1}\, c\, \rho = \rho$.

On voit donc que si u_h^{n-1} appartient à K_h^ρ , u_h^n appartient aussi à K_h^ρ . De même, les solutions u et u_h appartiennent nécessairement à K^ρ et K_h^ρ .

b) LES SOLUTIONS DES PROBLEMES P_h^n , P_h ET P EXISTENT.

Puisque les solutions u_h^{n-1} appartiennent à K_h^ρ si elles existent, et puisque u_h^o appartient à K_h^ρ , les solutions u_h^n existent d'après (4-11) i) et le théorème de Stampacchia.

Nous allons montrer que les solutions u_h^n convergent vers u_h .

Ceci résultera de l'inégalité :

$$(4\text{-}20)\quad \left\{ \begin{array}{l} ||u_h^{n+1} - u_h^n||_h \leq (c^{-1}\, L\, \rho)||u_h^n - u_h^{n-1}||_h \leq \\ \qquad\qquad \leq c^{-1}(c\,\rho + M)(c^{-1}\, L\, \rho)^n = N\,\theta^n \quad ; \quad \theta = c^{-1}\, L\, \rho < 1 \end{array} \right.$$

En effet, d'après (4-11) :

$$c||u_h^{n+1} - u_h^n||_h^2 \leq b_h(u_h^n\,;\, u_h^{n+1} - u_h^n\,,\, u_h^{n+1} - u_h^n) \leq$$

$$\leq b_h(u_h^{n-1}\,;\, u_h^n\,,\, u_h^{n+1} - u_h^n) - b_h(u_h^n\,;\, u_h^n\,,\, u_h^{n+1} - u_h^n)$$

$$\leq L||u_h^n - u_h^{n-1}||_h||u_h^n||_h||u_h^{n+1} - u_h^n||_h \leq L\,\rho||u_h^{n+1} - u_h^n||_h||u_h^n - u_h^{n-1}||_h\ .$$

et d'après (4-12) :

$$c||u_h^1 - u_h^o||_h^2 \leq b_h(u_h^o\,;\, u_h^1 - u_h^o\,,\, u_h^1 - u_h^o) \leq (f_h\,,\, u_h^1 - u_h^o)_h +$$

$$+\, b_h(u_h^o\,;\, u_h^o\,,\, u_h^1 - u_h^o) \leq (M + c\,\rho)||u_h^1 - u_h^o||_h$$

Pour tout h fixé, on déduit de (4-20) que la suite u_h^n est une suite de Cauchy puisque $\theta = c^{-1}\, L\, \rho < 1$, qui converge vers un élément u_h de V_h , qui est solution de l'inéquation (4-14) puisque la forme $b_h(u_h\,,\, v_h\,,\, w_h)$ est continue par rapport aux trois variables.

c) LES SOLUTIONS u_h^n CONVERGENT DISCRETEMENT VERS LA SOLUTION u .

En ajoutant et retranchant $b_h(u_h^{n-1}\,;\, u_h^n\,,\, u_h^n - r_h u)$, on obtient l'inégalité :

$$(4\text{-}21)\left\{ \begin{array}{l} s_h(u_h^n\,,\, r_h u) \leq (\psi_u(h) + \varepsilon(f\,,\, f_h) + L\,\rho||u_h^n - u_h^{n-1}||_h)||u_h - r_h u||_h \\ \quad + ||f - A(u)||_* \, ||u - p_h r_h u|| \end{array} \right.$$

La majoration de l'erreur (4-15) résulte alors de (4-18) , (4-20) et (4-21). On obtient de manière analogue l'inégalité (4-17) dans le cas ou A_h est la restriction de l'opérateur A .

On démontre de la même manière la convergence discrète des solutions u_h *lorsque l'on prend pour opérateur* A_h *la somme des restrictions partielles de l'opérateur* A *(cf. §3 , n° 3-5 , proposition 3-3).*

Nous allons énoncer un théorème de convergence faible lorsque les formes $a_h(u_h , v_h)$ sont seulement monotones.

THEOREME 4-3.

Sous les hypothèses du théorème 1 du §4 , où la condition S_2' *est remplacée par la condition* S_3' :

$$S'_3 \begin{cases} \text{i)} & s_h(u_h , v_h) \geqslant 0 \\ \text{ii)} & \lim_{||u_h||_h = \infty} s_h(u_h , r_h u_o) \Big/ ||u_h - r_h u_o||_h = \infty \\ \text{iii)} & A \text{ est borné et } \lim_{\lambda=0} a(u - \lambda w ; v) = a(u , v) \end{cases}$$

On peut extraire une sous-suite u_h *de la famille des solutions* u_h *des problèmes* P_h *convergeant faiblement vers une solution* u *du problème* P .

Le théorème de Hartmann-Stampacchia entraîne l'existence des solutions des problèmes P et P_h . L'unicité a lieu si on suppose que :

(4-22) $\quad s(u , v) > 0$ pour tout $u , v \in K \ ; \ u \neq v$.

La démonstration du théorème 3 du §4 est analogue à celle du théorème 3-5 du §3. On déduit de S_3' ii) que $||u_h||_h$ est borné, donc que $||p_h u_h||$ l'est également. On peut donc en extraire une sous-suite (encore notée) $p_h u_h$ qui converge faiblement vers un élément u_* de K (convexe fermé).

Montrons que u_* est solution du problème P . Soit pour cela v un élément arbitraire de K .

Puisque

$$0 \leqslant s_h(u_h , r_h v) \leqslant (f_h ; u_h - r_h v)_h - (f , p_h u_h - p_h r_h v) + a(v ; p_h u_h - p_h r_h v) - a_h(r_h v ; u_h - r_h v) + (f , p_h u_h - p_h r_h v) - a(v ; p_h u_h - p_h r_h v)$$

on en déduit qu'après passage à la limite, on obtient :

(4-23) $\quad 0 \leqslant (f , u_* - v) - a(v ; u_* - v) \quad ; \quad v \in K$

D'après le procédé de MINTY , u_* est solution de (4-1). En effet, soit $v = u_* + \lambda(w - u_*) = \lambda w + (1 - \lambda)u_*$, $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$ qui appartient au convexe K si w appartient à K.

On déduit de (4-23) que :

$$\lambda(A(u_* + \lambda(w - u_*)) , w - u_*) \geqslant \lambda(f , w - u_*)$$

En divisant par $\lambda > 0$ et en faisant tendre λ vers 0 , il résulte de S_3' ii) que :

$(A(u_*) , u_* - w) \leqslant (f , u_* - w)$ pour tout w de K , ce qui achève la démonstration du théorème.

On peut démontrer des théorèmes analogues lorsque l'on prend pour opérateur A_h la somme des restrictions partielles d'un opérateur A ou la restriction d'un opérateur A .

§5. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES-OPERATIONNELLES (I)

Nous approchons dans ce paragraphe les solutions des équations différentielles-opérationnelles linéaires du 1° ordre.

$$\frac{du}{dt}(t) + A(t)\, u(t) = f(t) \quad ; \quad u(o) = u_o$$

où $A(t)$ sont des opérateurs d'un espace de Hilbert V dans son dual, par les solutions $u_h(t)$ d'un système d'équations différentielles usuelles :

$$\frac{du_h}{dt}(t) + A_h(t)\, u_h(t) = \tilde{r}_h(t) \quad ; \quad u_h(o) = u_{oh}$$

où $A_h(t)$ sont des opérateurs d'un espace de dimension finie V_h .

Le n° 5-1 est consacré à quelques rappels et le théorème de convergence est démontré au n° 5-2.

Nous étudierons au chapitre II , §5 , l'approximation par rapport à la variable t des solutions u_h et (par suite) de la solution u .

Nous supposerons connus les n° 3-1 à 3-3 du §3 , les n° 1-6 et 1-8 du §1 , et le théorème 2-1 du n° 2-4 du §2 .

5-1. RAPPELS SUR LES EQUATIONS DIFFERENTIELLES-OPERATIONNELLES DU 1^e ORDRE.

Nous rappelons dans ce numéro le théorème d'existence et d'unicité d'une solution d'une équation différentielle-opérationnelle (cf. J.L. LIONS [1]).

On se donne un triplet $A(t)$ dépendant de $t \in [0 , T]$ (cf. Appendice).

(5-1) $A(t) = \{ V , H \; ; a(t , u , v) \}$; $t \in [0 , T]$

vérifiant :

$$(5\text{-}2)\quad \begin{cases} \text{i) } t \to a(t\ ;\ u\ ,\ v) \text{ est mesurable pour tout } u\ ,\ v \text{ fixé dans } V \\ \text{ii) } |a(t\ ;\ u\ ,\ v)| \leq M||u||\ ||v|| \quad ;\ M \text{ indépendante de } t \text{ (p . p)} \\ \text{iii) } \mathrm{Re}\ a(t\ ;\ v\ ,\ v) + \lambda|v|^2 \geq c||v||^2 \quad ;\quad c > 0 \quad ;\quad v \in V \end{cases}$$

On introduit d'autre part les espaces suivants :

$$(5\text{-}3)\quad \begin{cases} V = L^2(0,T\ ;\ V)\ ;\ V' = L^2(0,T\ ;\ V')\ ;\ H = L^2(0,T\ ;\ H) \\ W = \{u \in V \text{ telles que } u' = \dfrac{du}{dt} \in V'\} \\ \Phi = \{\phi \in W \text{ telles que } \phi(T) = 0\ \} \end{cases}$$

L'espace W est contenu dans l'espace $C(0,T\ ;\ H)$ des fonctions continues à valeurs dans H .

On se donne d'autre part :

$$(5\text{-}4)\quad f \in V'\ ;\ u_o \in M\ ;\ F = (f\ ,\ u_o) \in X = V' \times H$$

Considérons les problèmes équivalents suivants :

PROBLEME P .

Chercher u *dans* W *vérifiant :* $\Lambda u = F$ *dans* X *:*

$$(5\text{-}5)\quad \begin{aligned} &\frac{du}{dt} + A(t)u = f(t) \quad \textit{dans}\ V' \\ &u(o) = u_o \qquad\qquad \textit{dans}\ H \end{aligned}$$

PROBLEME P' .

Chercher u *dans* V *vérifiant :*

$$(5\text{-}6)\quad \begin{aligned} E(u\ ,\ \phi) &= \int_0^T \{-\ (u\ ,\ \phi') + a(t\ ;\ u\ ,\ \phi)\ \}dt = \\ &= F(\phi) = \int_0^T (f\ ,\ \phi)dt + (u_o\ ,\ \phi(o)) \end{aligned}$$

pour toute fonction ϕ *de* Φ .

Il existe une solution unique de ce problème :

THEOREME A .

Sous les hypothèses (5-2) , Λ *est un isomorphisme de* W *sur* X . *La solution* u *du problème* P *vérifie l'égalité de l'énergie :*

$$(5\text{-}7)\quad |u(t)|^2 + 2\ \mathrm{Re} \int_0^T a(s\ ;\ u(s)\ ,\ u(s))ds = |u_o|^2 + 2\ \mathrm{Re} \int_0^t (f(s)\ ,\ u(o))ds\ .$$

REMARQUE 5-1.

On peut toujours supposer dans l'hypothèses (5-2) iii) que $\lambda = 0$, en faisant le changement de fonction inconnue $u^* = ue^{\lambda t}$. Par la suite, nous supposerons que $\lambda = 0$.

5-2. APPROXIMATION PAR DES SYSTEMES D'EQUATIONS DIFFERENTIELLES :

Afin de fixer les notations et de montrer sur un exemple simple les méthodes que nous utiliserons (cf. §5 , n° 5-1), nous allons étudier l'approximation des solutions des équations différentielles-opérationnelles par celles d'équations différentielles usuelles et démontrer un théorème de convergence forte dans l'espace W.

Nous utiliserons ici de façon essentielle la notion d'*approximation autoadjointe* (§1 , n° 1-6) pour pouvoir construire des approximations de l'espace W à partir d'approximations de l'espace V .

Rappelons qu'un premier exemple d'approximations autoadjointes (approximations de Galerkine) a été donné au §1 , n° 1-8 . On trouvera au chapitre II , §3 , n° 3-2 des exemples d'approximations autoadjointes des espaces de Sobolev $H_o^m(\Omega)$.

Rappelons que (cf. Appendice)

$$V \subset H \subset V'$$

Donnons-nous des approximations autoadjointes de V dans des espaces de dimension finie V_h :

$$(5\text{-}8)\quad A_h(V) = (V , V_h , p_h , r_h^*) \quad ; \quad A_h(V') = (V' , V_h , p_h , r_h^*)$$

Nous désignerons par $(u_h , v_h)_h$ le produit scalaire identifiant V_h et son dual. Rappelons que :

$$(p_h u_h , v) = (u_h , r_h^* v)_h .$$

Posons :

$$(5\text{-}9)\quad V_h = L^2(0,T ; V_h) \quad ; \quad V_h' = L^2(0,T ; V_h') \quad ; \quad W_h = \{u \in V_h \text{ telles que } u' \in V_h'\}$$

Donnons-nous une famille de triplets :

$$A_h(t) = \{V_h , V_h \; ; \; a_h(t ; u_h , v_h) \}$$

vérifiant les hypothèses (5-2) et $F_h = (f_h , u_{oh}) \in X_h = V_h' \times V_h$

Considérons alors le :

PROBLEME P_h .

Chercher u_h *dans* W_h *vérifiant* $\Lambda_h u_h = F_h$ *dans* X_h :

$$(5\text{-}10)\quad \begin{cases} \text{i)} & \dfrac{du_h}{dt} + A_h(t)\, u_h = f_h \ \textit{dans}\ V_h = V'_h \\ \text{ii)} & u_h(o) = u_{oh} \ \textit{dans}\ V_h\ . \end{cases}$$

Puisque V_h est un espace de dimension finie et que la matrice est définie positive (d'après (5-3)) , u_h est la solution du problème de Cauchy pour un système d'équations différentielles linéaires.

Considérons alors les solutions uniques des problèmes P et P_h :

THEOREME 5-1.

Supposons que :

$$(5\text{-}11)\quad \lim_{h=0} \left[\int_0^T ||p_h v_h||_h^2 dt \right]^{-1/2} \int_0^T |a_h(t\ ;\ r_h^* u\ ,\ v_h) - a(t\ ;\ u\ ,\ p_h v_h)| dt = 0$$

$$(5\text{-}12)\quad \begin{cases} \text{i)} & \lim\limits_{h=0} |u_{oh} - r_h^* u_o|_h = 0 \\ \text{ii)} & \lim\limits_{h=0} \left(\int_0^T ||p_h v_h||_h^2\, dt \right)^{-1/2} \int_0^T |(f_h(t)\ ,\ v_h)_h - (f\ ,\ p_h v_h)| dt = 0 \end{cases}$$

Les solutions u_h *convergent alors discrètement vers* u *dans l'espace* W :

$$(5\text{-}13)\quad \lim_{h=0} \int_0^T \{ ||r_h^* u - u_h||_h^2 + ||\tfrac{d}{dt}(r_h^* u - u_h)||_{*h}^2 \}\, dt = 0$$

et par suite :

$$(5\text{-}14)\quad \lim_{h=0} \sup_{t\in[0,T]} |r_h^* u(t) - u_h(t)|_h = 0\ .$$

Si l'on suppose de plus que les approximations autoadjointes $A_h(V)$ *sont stables et convergentes, les solutions* u_h *convergent vers* u *dans l'espace* W :

$$(5\text{-}15)\quad \lim_{h=0} \int_0^T \{ ||u - p_h u_h||^2 + ||\tfrac{d}{dt}(u - p_h u_h)||_*^2 \}\, dt = 0$$

et par suite :

$$(5\text{-}16)\quad \lim_{h=0} \sup_{t\in[0,T]} |u(t) - p_h u_h(t)| = 0$$

Nous allons démontrer la convergence discrète des solutions u_h vers la

solution u à l'aide du théorème 2-1 du §2 , n° 2-4 .

En effet, les hypothèses (5,12) impliquent la convergence discrète de f_h vers f et de u_{oh} vers u_o , donc de $F_h = (f_h , u_{oh})$ vers $F = (f , u_o)$ dans l'espace X_h .

L'hypothèse (5,11) implique la consistance des opérateurs Λ_h à l'opérateur Λ : En effet, puisque les approximations sont autoadjointes, nous avons :

$$(5\text{-}17)\quad \int_0^T \{ (r_h^* u' , v_h)_h - (u' , p_h v_h) \} dt = 0$$

et l'hypothèse (5,11) implique que dans V'_h , $||r_h^* \Lambda u - \Lambda_h r_h^* u||_{V'_h}$ tend vers 0.

Il nous reste à montrer la stabilité des opérateurs Λ_h^{-1} , c'est-à-dire à montrer que si $||f_h||^2_{V'_h} + |u_{oh}|^2_h$ est borné, il en est de même de $||u_h||^2_{V_h} + ||u'_h||^2_{V'_h}$.

Soit u_h la solution du problème P_h . Elle vérifie l'inégalité de l'énergie suivante :

$$(5\text{-}18)\quad \sup_t |u_h(t)|^2_h + \int_0^T ||u_h(t)||^2_h dt \leq K\Big(\int_0^T ||f_h(t)||^2_{*h} + |u_{oh}|^2_h \Big)$$

(obtenue en faisant le produit scalaire de (5-10) i) par u_h et en intégrant de 0 à t la partie réelle de l'expression obtenue).

On en déduit déjà que $||u_h||_{V_h}$ est borné.

En faisant maintenant le produit scalaire de (5-10) i) par V_h , nous obtenons :

$$\Big| \int_0^T (u'_h , v_h)_h \, dt \Big| = \Big| \int_0^T \{ (f_h , v_h)_h - a_h(t ; u_h , v_h) \} dt \Big| \leq$$

$$\leq (||f_h||_{V'_h} + ||u_h||_{V_h}) \, ||v_h||_{V_h} \leq K_1 ||v_h||_{V_h}$$

d'où l'on déduit que $||u'_h||_{V'_h}$ est aussi borné, ce qui achève la démonstration de la stabilité.

Nous obtenons la convergence discrète des solutions u_h vers la solution u dans les espaces W_h . Si les approximations $A_h(V)$ sont stables et convergentes, on en déduit la convergence forte de u_h vers u dans l'espace W_h (théorème 1-1 du §1).

EXEMPLE : SCHEMAS RESTRICTIONS ; MAJORATION DE L'ERREUR.

Supposons que V_h est un espace de dimension finie et que p_h est injective. Posons :

$$(5\text{-}19)\quad (u_h , v_h) = (p_h u_h , p_h v_h)$$

et supposons que

$$(5\text{-}20)\quad ||p_h f_h||_* \leq ||f_h||_{*h} = \sup_{v_h} \frac{(p_h f_h \ , \ p_h v_h)}{||p_h v_h||}$$

Alors, si r_h^* est la transposée de p_h , définie par :

$$(5\text{-}21)\quad (p_h r_h^* f \ , \ p_h v_h) = (f \ , \ p_h v_h)$$

les approximations autoadjointes $A_h(V) = (V \ , \ V_h \ , \ p_h \ , \ r_h^*)$ sont stables. On prendra alors :

$$(5\text{-}22)\quad \begin{cases} a_h(t \ ; \ u_h \ , \ v_h) = a(t \ ; \ p_h u_h \ , \ p_h v_h) \\ (f_h(t) \ , \ v_h)_h = (f(t) \ , \ p_h v_h) \\ u_{oh} = r_h^* u_o \ . \end{cases}$$

THEOREME 5-2.

Si l'on suppose que (5,19) , (5,20) *et* (5,22) *ont lieu, les erreurs* $u - p_h u_h$ *entre les solutions des problèmes* P *et* P_h *vérifient :*

$$\sup_t |u(t) - p_h u_h(t)|^2 + \int_0^T ||u - p_h u_h||^2 \, dt \leq$$

$$\leq K\left(\left(\int_0^T ||u - p_h r_h u||^2 \, dt \right)^{1/2} + |u_o - p_h r_h^* u_o|^2 \right)$$

quelle que soit la restriction r_h *de* V *dans* V_h .

En effet, on remarque que :

$$(u' - p_h u'_h \ , \ u - p_h u_h) + a(t \ ; \ u - p_h u_h \ , \ u - p_h u_h) =$$

$$= (u' - p_h u'_h \ , \ u - p_h r_h u) + a(t \ ; \ u - p_h u_h \ , \ u - p_h r_h u)$$

$$= (F_h \ , \ u - p_h r_h u)$$

Mais $F_h = f - p_h u'_h - A(t) p_h u_h$ est dans un borné de $L^2(0,T \ ; \ V')$. On en déduit, en intégrant deux fois la partie réelle de cette égalité, l'inégalité du théorème.

EXEMPLE 5-1.

Supposons que l'injection de V dans H soit compacte. Prenons pour approximations autoadjointes stables et convergentes, les approximations autoadjointes de Galerkine définies au n° 1-8 du §1 du Chapitre I .

Si ω_j sont les vecteurs propres de l'opérateur Λ défini par $((u,v)) = (\Lambda u, v)$ on posera :

$$(5\text{-}23) \qquad p_h u_h = \sum_{j=1}^{n} u_h^j \, \omega^j \qquad ; \qquad h = n^{-1}$$

Le système d'équations différentielles obtenu en faisant (5-22) s'écrit :

$$(5\text{-}24) \qquad \frac{d}{dt} \, u_h^j(t) + \sum_{i=1}^{n} a(t \, ; \, \omega^i \, , \, \omega^j) u_h^i(t) = (f(t) \, , \, \omega^j) \qquad ; \quad 1 \leqslant j \leqslant n \, .$$

COROLLAIRE 5-1.

Soit u_h *la solution de* (5-24). *Alors :*

$$(5\text{-}25) \qquad \lim_{h=0} \int_0^T \{ \, ||u(t) - p_h u_h|(t)||^2 + ||u'(t) - \frac{d}{dt} \, p_h u_h||_*^2 \, \} \, dt = 0 \, .$$

$$(5\text{-}26) \qquad \begin{cases} \sup_t \, |u(t) - p_h u_h(t)|^2 + \int_0^T ||u - p_h u_h||^2 \, dt \leqslant \\ \leqslant M \left[\left(\int_0^T ||u - p_h r_h^* u||^2 \, dt \right)^{1/2} + |u_o - p_h r_h^* u_o|^2 \right] \end{cases}$$

En effet, d'après la proposition 5-1 du n° 1-8 du §1 du chapitre I , les hypothèses des théorèmes 5-1 et 5-2 sont satisfaites.

CHAPITRE II

APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV ET DES SOLUTIONS D'EQUATIONS AUX DERIVEES PARTIELLES.

§1. APPROXIMATION DES ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES ET DES ESPACES L^P .

Nous construirons dans ce paragraphe une famille d'approximations de divers espaces de fonctions continues et des espaces L^P à partir de la donnée de partitions de l'unité subordonnées à des recouvrements localement finis dont le module tend vers 0 . Ces approximations sont stables, convergentes, et, dans le cas des espaces L^P , autoadjointes. On fixe au n° 1-1 les notations, on étudie au n° 1-2 l'approximation des espaces de fonctions continues et au n° 1-3 l'approximation des espaces L^P .

Ce paragraphe est indépendant du reste du chapitre et suppose connu le §1 du chapitre I .

1-1. NOTATIONS.

Nous désignerons par H l'un des espaces suivants de fonctions continues sur R^n .

- *l'espace* C

des fonctions continues sur $\mathbb{R}^n$, muni de la topologie de la convergence compacte, définie par les semi-normes :

$$(1\text{-}1) \qquad ||\phi||_K = \sup_{x \in K} |\phi(x)| \quad ; \quad K \text{ est un compact de } R^n$$

- *l'espace* C_o

des fonctions continues nulles à l'infini, muni de la topologie de la convergence uniforme, définie par la norme :

$$(1\text{-}2) \qquad ||\phi|| = \sup_x |\phi(x)|$$

Si λ est une fonction continue n'appartenant pas à C_o ,

- *l'espace* C_λ

est le sous-espace des fonctions ϕ de C_o décroissant plus vite que λ^{-1} , c'est-à-dire vérifiant :

$$(1\text{-}3) \qquad \lim_{|x| = \infty} |\lambda(x)\ \phi(x)| = 0$$

C'est un espace de Banach pour la norme

(1-4) $||\phi||_{(\lambda)} = ||\phi|| + ||\lambda\ \phi||$

Si Λ est un ensemble de fonctions continues λ n'appartenant pas à C_o ,

- *l'espace* $C(\Lambda)$

est la limite projective (l'intersection) des espaces C_λ . C'est un espace de Fréchet si Λ est dénombrable. (Par exemple,si Λ est l'ensemble des polynômes, $C(\Lambda)$ est l'espace des fonctions continues à décroissance (polynomiale) rapide).

Considérons enfin

- *l'espace* K

des fonctions continues à support compact, limite inductive (réunion) des espaces de Banach K_K des fonctions continues à support dans le compact K .

Rappelons que :

(1-5) $K \subset C(\Lambda) \subset C_\lambda \subset C_o \subset C$

Par dualité, nous obtenons :

(1-6) $C' \subset C'_o \subset C'_\lambda \subset C'(\Lambda) \subset K'$

Ce sont respectivement les espaces des mesures à support compact, des mesures bornées, des mesures croissant plus lentement que λ , plus lentement qu'une fonction λ de Λ , de toutes les mesures sur $\mathbb{R}^n$.

Nous introduirons aussi, si $d\mu$ est une mesure et $1 \leqslant p \leqslant \infty$,

- *l'espace* $L^p(d\mu)$

des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ $d\mu$ - intégrables, muni de la norme :

(1-7) $|\phi|_p = \left(\int |\phi(x)^p\ d\mu \right)^{1/p}$

Si λ est une fonction mesurable,

- *l'espace* $L^p_\lambda(d\mu)$

est l'espace des fonctions ϕ de $L^p(d\mu)$ telles que $\lambda\ \phi$ appartiennent à $L^p(d\mu)$, muni de la norme :

(1-8) $|\phi|_{p\ ,\ (\lambda)} = \left(|\phi|_p^p + |\lambda\ \phi|_p^p \right)^{1/p}$

Nous allons construire des approximations des espaces H et $L^p_\lambda(d\mu)$ à partir de partitions de l'unité de $\mathbb{R}^n$.

Si R_h est un ensemble d'indices α , *nous désignerons par* ω_h *un recouvrement localement fini de* $\mathbb{R}^n$ *formé d'ouverts relativement compacts* ω_h^α ; $(\alpha \in R_h)$ *et par* $\sigma_h = (\sigma_h^\alpha)$ *une partition de l'unité subordonnée au recouvrement* ω_h :

(1-9) $0 \leqslant \sigma_h^\alpha(x) \leqslant 1$; support $\sigma_h^\alpha \subset \omega_h^\alpha$; $\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h} \sigma_h^\alpha(x) = 1$

Nous appelerons module $|\omega_h|$ du recouvrement ω_h le plus petit pavé $|\omega_h|$ (centré à l'origine) tel que tout ouvert ω_h^α du recouvrement ω_h soit contenu dans un translaté de $|\omega_h|$. Nous dirons que ω_h tend vers 0 si son module tend vers 0 .

Si ϕ est une fonction continue et K un compact, nous désignerons par :

(1-10) $\omega_K(\phi\ ,\ |\omega_h|\ ) = \sup_{x,y \in K\ ;\ x-y \in |\omega_h|} |\phi(x) - |\phi(y)|$

le module de continuité de ϕ *sur* $|\omega_h|$.

De même, si ϕ est une fonction de $L^P(d\,\mu)$, nous désignerons par :

(1-11) $\omega_p(\phi\ ,\ |\omega_h|\ ) = \sup_{x-y \in |\omega_h|} \left| \int |\phi(x) - \phi(y)|^P\, d\,\mu(x) \right|^{1/P}$

le P - module de continuité de ϕ sur $|\omega_h|$.

1-2. APPROXIMATIONS DISCRETES STABLES ET CONVERGENTES DES ESPACES DE FONCTIONS CONTINUES.

Soit H l'un des espaces C , C_o , C_λ , $C(\Lambda)$, K . On associe à tout h un ensemble $\mathcal{R}_h$ d'indices α , un recouvrement localement fini $\omega_h = (\omega_h^\alpha)$ et une partition de l'unité $\sigma_h = (\sigma_h^\alpha)$ subordonnée à ce recouvrement.

On considère ensuite des points x_h^α de ω_h^α et on pose

(1-12) $S_h^\alpha = \delta x_h^\alpha$ = mesure de Dirac au point x_h^α .

Il en résulte que $\sigma_h = (\sigma_h^\alpha)$ est une suite d'éléments de H et que $S_h = (S_h^\alpha)$ est une suite d'éléments de H' . Nous allons montrer que ces suites définissent des approximations discrètes des espaces H : (cf. chapitre I , §1 , n° 1-7).

THEOREME 1-1.

Supposons que :

(1-13) $\begin{cases} \text{i) } \textit{il existe un pavé borné } |\omega_o| \textit{ tel que } |\omega_h| \subset |\omega_o| \textit{ pour tout } h \\ \text{ii) } \textit{le recouvrement } |\omega_h| \textit{ tend vers } 0 \textit{ avec } h\ . \end{cases}$

Les troncatures

(1-14) $p_h r_h \phi = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h} \phi(x_h^\alpha)\ \sigma_h^\alpha$

sont alors uniformément bornées dans $L(H\ ,\ H)$ *et tendent vers l'identité quand* h

tend vers 0 .

Les approximations discrètes $A_h(H) = (H , \sigma_h , S_h)$ *sont stables et convergentes.*

REMARQUE 1-1.

Les espaces $H_h = r_h H$ sont les espaces suivants de suites scalaires sur R_h , analogues aux espaces H :

- l'espace $c = c(R_h)$ de toutes les suites $u_h = (u_h^\alpha)$ sur R_h si $H = C$.
- l'espace $c_o = c_o(R_h)$ des suites u_h telles que $\lim_{|\alpha| = \infty} |u_h^\alpha| = 0$ si $H = C_o$. Si $\lambda_h^\alpha = \lambda(x_h^\alpha)$,
- l'espace $c_{\lambda_h} = c_{\lambda_h}(R_h)$ des suites u_h de c_o telles que $\lim_{|\alpha| = \infty} |\lambda_h^\alpha u_h^\alpha| = 0$ si $H = C_\lambda$
- l'espace $k = k(R_h)$ des suites à support fini sur R_h si $H = K$.

Les prolongements p_h et les restrictions r_h sont définis par :

$$p_h u_h = \sum_{\alpha \in R_h} u_h^\alpha \sigma_h^\alpha \quad ; \quad r_h \phi = (\phi(x_h^\alpha))_{\alpha \in R_h} .$$

Posons :

$$(1\text{-}15) \qquad (f_h , u_h)_h = \sum_{\alpha \in R_h} f_h^\alpha \bar{u}_h^\alpha$$

Les espaces $H_h' = (r_h H)'$ sont respectivement l'espace $k = c'$, l'espace $l^\infty = c_o'$ des suites bornées sur R_h , l'espace c_{λ_h}' des suites à croissance plus lente que la suite λ_h , l'espace $c = k'$ de toutes les suites sur R_h . Les approximations duales sont définies par :

$$(1\text{-}16) \qquad p_h^* f_h = \sum_\alpha f_h^\alpha \delta x_h^\alpha \quad ; \quad r_h^*(d\mu) = \left(\int \sigma_h^\alpha(x) d\mu \right)_{\alpha \in R_h}$$

Ces approximations sont stables et faiblement convergentes. (cf. Chapitre I , §1 n° 1-5) . Si $f_h = r_h^*(d\mu)$, nous obtenons des formules de quadrature de la mesure $d\mu$ qui sont convergentes : $(p_h^* r_h^*(d\mu) , \phi)$ converge vers $(d\mu , \phi) = \int \phi \, d\mu$.

S'il existe des points x_h^α tels que :

$$(1\text{-}17) \qquad \sigma_h^\alpha(x_h^\beta) = \begin{cases} 0 & \text{si } \beta \neq \alpha \\ 1 & \text{si } \beta = \alpha \end{cases}$$

les approximations ainsi obtenues sont des interpolations (chap I , §1 , proposition 1-4) et les troncatures $p_h r_h$ sont des projecteurs de H .

DEMONSTRATION DU THEOREME 1-1.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^n$; nous poserons

(1-18) $\mathcal{R}_h(K) = \{ \alpha \in \mathcal{R}_h$ tels que $K \cap \omega_h^\alpha \neq \emptyset \}$; $\sigma_h^K = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h(K)} \sigma_h^\alpha$

L'ensemble $\mathcal{R}_h(K)$ est fini puisque ω_h est localement fini et les fonctions σ_h^K sont positives, plus petites que 1 , à support contenu dans le compact :

(1-19) $K_h = \bigcup_{\alpha \in \mathcal{R}_h(K)} \overline{\omega_h^\alpha}$

D'après l'hypothèse (1-13) i) , les compacts K_h sont contenus dans un compact fixe K_o .

- *Cas où* $H = C$.

Montrons la stabilité : pour tout compact K , il existe K_o tel que

(1-20) $\sup_h \sup_{x \in K} |p_h r_h \phi(x)| \leq \sup_{x \in K_o} |\phi(x)|$

Cette inégalité résulte des inégalités suivantes :

$$\sup_K |p_h r_h \phi(x)| = \sup_K \Big| \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h(K)} \phi(x_h^\alpha)\, \sigma_h^\alpha(x) \Big| \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in \mathcal{R}_h(K)} |\phi(x_h^\alpha)| \sup_K \sigma_h^K(x) \leq \sup_{x \in K_o} |\phi(x)| \ .$$

La convergence résulte de l'inégalité :

(1-21) Pour tout compact K , $\sup_K |\phi - p_h r_h \phi| \leq \omega_K(\phi\ ,\ |\omega_h|)$ et de l'hypothèse (1-13) ii) . Pour établir (1-21) , on écrit que $\phi(x) = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h} \phi(x)\, \sigma_h^\alpha(x)$ puisque σ_h est une partition de l'unité.

On en déduit que :

$$\sup_K |\phi - p_h r_h \phi| \leq \sup_{K_h} \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h(K)} |\phi(x) - \phi(x_h^\alpha)|\, \sigma_h^\alpha(x) \leq$$

$$\leq \sup_{\alpha \in \mathcal{R}_h(K)} \sup_{x \in K \cap \omega_h^\alpha} |\phi(x) - \phi(x_h^\alpha)| \leq \omega_K(\phi\ ,\ |\omega_h|)$$

- *Cas où* $H = K$.

La stabilité résulte de (1-21) : Si les fonctions ϕ ont leur support dans K , les troncatures $p_h r_h \phi$ ont leur support dans K_o . La convergence résulte alors de (1-21) .

- *Cas où* $H = C_o$.

Il faut tout d'abord démontrer que si ϕ appartient à C_o , $p_h r_h \phi$ appartient à

C_o , c'est-à-dire que

$$(1\text{-}22) \qquad \lim_{|x| = \infty} |p_h r_h \phi(x)| = 0$$

Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact K tel que :

$$\sup_{x \notin K} |\phi(x)| \leqslant \varepsilon \quad , \text{ donc } \sup_{\alpha \notin R_h(K)} |\phi(x_h^\alpha)| \leqslant \varepsilon$$

Donc, puisque K_h est contenu dans K_o :

$$\sup_{x \notin K_o} |p_h r_h \phi(x)| \leqslant \sup_{\alpha \notin R_h(K_o)} |\phi(x_h^\alpha)| \leqslant \varepsilon$$

ce qui montre (1-22) et la stabilité des approximations, puisque K_o ne dépend pas de h . On démontre la convergence de façon analogue.

- *Cas où* $H = C_\lambda$ *et où* $H = C(\Lambda)$

On remarque qu'il suffit de démontrer que (pour tout λ de Λ)

$$(1\text{-}23) \quad \begin{cases} \text{i)} \quad \lim_{|x| = \infty} (1 + |\lambda(x)|) \, |p_h r_h \phi(x)| = 0 \\ \text{ii)} \quad \sup_h \sup_x (1 + |\lambda(x)|) \, |p_h r_h \phi(x)| \text{ est borné} \\ \text{iii)} \quad \lim_{h=0} \sup_x (1 + |\lambda(x)|) \, |p_h r_h \phi(x) - \phi(x)| = 0 \end{cases}$$

Prenons, pour simplifier, pour point x_h^α le point où $\lambda(x)$ atteint son maximum sur ω_h^α . Posons alors :

$$(1\text{-}24) \qquad \lambda_h^\alpha = \lambda(x_h^\alpha) \quad ; \quad \rho_h^\alpha(x) = \frac{1 + |\lambda(x)|}{1 + |\lambda_h^\alpha|} \quad \sigma_h^\alpha(x) \leqslant 1$$

On vérifie que :

$$(1\text{-}25) \qquad (1 + |\lambda|) \, p_h r_h \phi = \sum_\alpha (1 + |\lambda_h^\alpha|) \, \phi(x_h^\alpha) \, \rho_h^\alpha$$

Puisque $\sup_{\omega_h^\alpha} \dfrac{1 + |\lambda|(x)}{1 + |\lambda_h^\alpha|} \leqslant 1$ et puisque $(1 + |\lambda|) \, \phi \in C_o$, on montre comme précédemment que pour tout ε , il existe un compact K tel que :

$$\sup_{x \notin K_o} (1 + |\lambda|) \, |p_h r_h \phi| \leqslant \sup_{x \notin K} (1 + |\lambda|) \, |\phi| \leqslant \varepsilon$$

ce qui implique (1-23) i) . D'autre part, il résulte de (1-20) que :

$$\sup_{K_o} (1 + |\lambda|) \, |p_h r_h \phi| \leqslant \sup_{K_1} (1 + |\lambda|) \, |\phi|$$

Ces deux dernières inégalités entraînent (1-23) ii).

Enfin, puisque

$$(1 + |\lambda|)(\phi - p_h r_h \phi) = \sum_\alpha (\phi(x) - \phi(x_h^\alpha))(1 + |\lambda|)\sigma_h^\alpha$$

nous en déduisons que pour tout ε , il existe un compact K et h_o tel que :

$$\sup_{x \notin K} (1 + |\lambda|)|\phi - p_h r_h \phi)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

$$\sup_{x \in K} (1 + |\lambda|) |\phi - p_h r_h \phi)| \leqslant \sup_K (1 + |\lambda|) \omega_K(\phi , |\omega_h|) \leqslant \frac{\varepsilon}{2}$$

ce qui entraîne (1-23) iii).

REMARQUE 1-2.

A l'aide de la proposition 1-7 du chapitre I , §1 , n° 1-10 , on peut construire d'autres approximations des espaces H .

Par exemple, si ρ est une fonction positive à support compact de masse totale égale à 1 , on prend pour opérateur P_h l'opérateur de convolution par

$$\rho_h(x) = \frac{1}{h} \rho(\frac{x}{h}).$$

Dans ce cas :

$$(1\text{-}26) \quad P_h \; p_h \; r_h \phi = \sum_\alpha \phi(x_h^\alpha) \; \rho_h * \sigma_h^\alpha(x)$$

et les hypothèses de la proposition 1-7 sont satisfaites puisque ρ_h converge vers δ . Si la fonction ρ est q-fois différentiable, ϕ est alors approchée par des fonctions q-fois différentiables.

Considérons maintenant une suite de fonctions γ_h à support compact Γ_h , uniformément bornées dans C_o et convergeant vers 1 dans C . Prenons pour opérateur R_h les opérateurs de multiplication par γ_h . Dans ce cas

$$(1\text{-}27) \quad p_h \; r_h \; R_h \; \phi = \sum \phi(x_h^\alpha) \; \gamma_h(x_h^\alpha) \; \sigma_h^\alpha(x)$$

est une combinaison linéaire *finie* des fonctions σ_h^α . Si $N(h)$ est le nombre des points x_h^α de Γ_h , les espaces $r_h \; R_h \; H$ sont des espaces de dimension finie $\mathbb{C}^{N(h)}$.

1-3. APPROXIMATIONS DES ESPACES $L^p(d\mu)$.

Soit $d\mu$ une mesure sur $\mathbb{R}^n$ et $L^p(d\mu)$ l'espace des fonctions de puissance $p^{\text{ième}}$ $d\mu$ intégrables. Nous allons construire des approximations autoadjointes (cf. chapitre I , §1 , n° 1-6) stables et convergentes des espaces $L^p(d\mu)$ à

partir de partitions de l'unité de R^n .

On associe à tout h un ensemble $\mathcal{R}_h$ d'indices α , un recouvrement localement fini $\omega_h = (\omega_h^\alpha)$ et une partition de l'unité $\sigma_h = (\sigma_h^\alpha)$ subordonnée à ce recouvrement, formée de fonctions σ_h^α de $L^\infty(d\mu)$. Puisque les σ_h^α sont à support compact, les σ_h^α appartiennent aussi à $L^P(d\mu)$ pour tout $P \geqslant 1$.

Posons

$$\theta_h^\alpha = \int \sigma_h^\alpha(x)\, d\mu \tag{1-28}$$

et désignons par $\ell_h^P(d\mu)$ l'espace des suites $u_h = (u_h^\alpha)$ sur $\mathcal{R}_h$ vérifiant :

$$|u_h|_{h,P} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h} |u_h^\alpha|^P \, |\theta_h^\alpha|^{1-P/2} \Big)^{1/P} < +\infty \tag{1-29}$$

Considérons alors :

$$\begin{cases} p_h u_h = \sum\limits_\alpha u_h^\alpha (\theta_h^\alpha)^{-1/2} \ \sigma_h^\alpha \\ r_h^* \phi = \big((\theta_h^\alpha)^{-1/2} \int \phi(x)\, \sigma_h^\alpha(x)\, d\mu \big)_\alpha \end{cases} \tag{1-30}$$

Il est clair que la forme sesquilinéaire

$$(f_h \ , \ u_h)_h = \sum_\alpha f_h^\alpha \, \bar{u}_h^\alpha \tag{1-31}$$

met en dualité les espaces $\ell_h^P(d\mu)$ et $\ell_h^{P'}(d\mu)$ avec $\frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = 1$, puisque, d'après l'inégalité de Hölder :

$$\begin{cases} |(f_h \ , \ u_h)_h| = \Big| \sum\limits_\alpha u_h^\alpha (\theta_h^\alpha)^{1/P' \, - \, 1/2} \, \overline{u_h^\alpha} (\theta_h^\alpha)^{1/P \, - \, 1/2} \Big| \leqslant \\ \qquad\qquad \leqslant |u_h|_{h,P} |f_h|_{h,P'} \end{cases} \tag{1-32}$$

Il est alors clair que la restriction r_h^* est la transposée du prolongement p_h .

THEOREME 1-2.

Sous l'hypothèse (1-13), les approximations discrètes autoadjointes

$$A_h(L^P(d\mu)) = (L^P(d\mu) \ , \ \ell_h^P(d\mu) \ , \ p_h \ , \ r_h^*) = (L^P(d\mu) \ , \ (\theta_h^\alpha)^{-1/2} \, \sigma_h^\alpha)$$

de l'espace $L^P(d\mu)$ *sont stables et convergentes :*

$$\begin{cases} \text{i)} \ |p_h u_h|_P \leqslant |u_h|_{h,P} \ ; \ |r_h^* \phi|_{h,P} \leqslant |\phi|_P \\ \text{ii)} \ |\phi - p_h r_h^* \phi|_P \leqslant \omega_P(\phi \ , \ |\omega_h|) \end{cases} \tag{1-33}$$

- *Les prolongements sont stables.*

D'après l'inégalité de Hölder,

$$(1\text{-}34) \quad \Big| \sum_\alpha \zeta^\alpha \eta^\alpha \Big| \leq \Big(\sum_\alpha |\zeta^\alpha|^P \eta^\alpha \Big)^{1/P} \Big(\sum_\alpha \eta^\alpha \Big)^{1/P'}$$

et puisque σ_h est une partition de l'unité, nous avons presque partout :

$$|p_h u_h|^P \leq \sum |u_h^\alpha|^P \, |\theta_h^\alpha|^{-P/2} \, \sigma_h^\alpha(x)$$

d'où nous en déduisons la stabilité des prolongements.

- *Les restrictions sont stables :*

$$|r_h^* \phi|_{h,P}^P = \sum_\alpha |\theta_h^\alpha|^{1-P} \Big| \int \phi(x) \, \sigma_h^\alpha(x) d\mu \Big|^P$$

Mais, d'après l'inégalité de Hölder,

$$\Big| \int \phi(x) \, \sigma_h^\alpha(x) \, d\mu \Big|^P \leq \int |\phi(x)|^P \, \sigma_h^\alpha(x) |d\mu| \theta_h^\alpha|^{P/P'}$$

Puisque $1 - P - P/P' = 0$, il en résulte que :

$$|r_h^* \phi|_{h,P}^P \leq \int |\phi(x)|^P \Big(\sum_\alpha \sigma_h^\alpha(x) \Big) d\mu = \int |\phi(x)|^P \, d\mu \, .$$

- *Les approximations sont convergentes :*

On remarque que :

$$(1\text{-}35) \quad \phi(x) = \sum_\alpha \phi(x) \, \sigma_h^\alpha(x) = \sum_\alpha (\theta_h^\alpha)^{-1} \int \phi(x) d\mu(y) \, \sigma_h^\alpha(x)$$

On en déduit que :

$$(1\text{-}36) \quad \phi - p_h r_h^* \phi = \sum_\alpha \Big[\int \big[\phi(x) - \phi(y)\big] \, \sigma_h^\alpha(y) d\mu(y) \Big] (\theta_h^\alpha)^{-1} \, \sigma_h^\alpha(x)$$

Puisque les troncatures $p_h r_h^*$ sont dans un équicontinu de $L(L^P(d\mu), L^P(d\mu))$, il suffit de montrer que $p_h r_h^* \phi$ converge vers ϕ pour toute fonction continue. Dans ce cas, en utilisant l'inégalité de la moyenne, nous obtenons :

$$\int |\phi - p_h r_h^* \phi|^P \, d\mu \leq \sum_\alpha \int d\mu \, \sigma_h^\alpha(x) \sup_{x-y \in \omega_h^\alpha} |\phi(x) - \phi(y)|^P$$

$$\leq \omega_P^P (\phi \, , |\omega_h|) \, .$$

REMARQUE 1-3. APPROXIMATION DES ESPACES $L^P_\lambda(d\,\mu)$.

Soit λ une fonction mesurable. Désignons par $\underline{\lambda}^\alpha_h$ et $\bar{\lambda}^\alpha_h$ les bornes essentielles inférieures et supérieures de $|\lambda(x)|$ sur ω^α_h :

(1-37) $\underline{\lambda}^\alpha_h \leqslant |\lambda(x)| \leqslant \bar{\lambda}^\alpha_h$ presque partout sur ω^α_h .

Désignons par $\ell^P_{\lambda;h}(d\,\mu)$ l'espace des suites $u_h = (u^\alpha_h)$ telles que

(1-38) $|u_h|_{h,P,(\lambda)} = \Big(\sum_\alpha |u^\alpha_h|^P\ (1 + |\bar{\lambda}^\alpha_h|^P)\ |\theta^\alpha_h|^{1-P/2}\Big)^{1/P} < +\infty$.

COROLLAIRE 1-1.

Sous les hypothèses (1-13) et :

(1-39) $(1 + |\bar{\lambda}^\alpha_h|^P)\ (1 + |\underline{\lambda}^\alpha_h|^P)^{-1} \leqslant M$ *indépendant de* α *et de* h *, les approximations* $A_h(L^P_\lambda(d\,\mu) = (L^P_\lambda(d\,\mu)\ ,\ \ell^P_{\lambda,\lambda}(d\,\mu)\ ,\ p_h, r^*_h)$ *sont stables et convergentes.*

La stabilité des p_h se montre comme précédemment. Vérifions la stabilité des restrictions r^*_h :

$$|r^*_h\,\phi|^P_{h,P,\lambda} = \sum_\alpha |\theta^\alpha_h|^{1-P}\ (1 + |\bar{\lambda}^\alpha_h|^P)\ \Big|\int \phi(x)\ \sigma^\alpha_h(x)\ d\,\mu\Big|^P$$

$$\leqslant M \sum_\alpha (1 + |\underline{\lambda}^\alpha_h|^P) \int |\phi(x)|^P\ \sigma^\alpha_h(x)\ d\,\mu$$

$$\leqslant M \sum_\alpha \int (1 + |\lambda(x)|^P)\ |\phi(x)|^P\ \sigma^\alpha_h(x)\ d\,\mu.$$

La convergence des approximations s'établit comme précédemment.

§2. APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV SUR R^n .

Nous allons construire des approximations des espaces de Sobolev $W^{m,P}$ des (classes de) fonctions de puissance $P^{\text{ième}}$ sommables sur R^n dont les dérivées (au sens des distributions) jusqu'à l'ordre $m > 0$ appartiennent à L^P . C'est un espace de Banach, réflexif si $1 < P < \infty$, pour la norme :

$$||\phi||_{m,P} = \Big(\sum_{|q|\leqslant m} |D^q\,\phi|^P_P\Big)^{1/P}\ ;\ |\phi|_P = \Big(\int |\phi(x)|^P\,dx\Big)^{1/P}$$

(nous poserons $W^{0,P} = L^P$, $W^{m,2} = H^m$).

Nous construirons des approximations de ces espaces à partir de partitions de

l'unité formée de translatées de puissances de convolutions des fonctions caractéristiques χ_h du cube $(-h , 0)^n$. En effet, les dérivées de telles fonctions sont des quotients différentiels.

On étudie ces fonctions au n° 2-1 et le théorème 2-1 du n° 2-2 énonce les propriétés de ces approximations et leurs conséquences immédiates (inégalités de Sobolev discrètes). On généralise cette construction au n° 2-3 pour obtenir des approximations des espaces de distributions et des domaines de générateurs infinitésimaux de groupes continus d'opérateurs. On suppose connu le §1 du chapitre I .

2-1. PUISSANCES DE CONVOLUTION DES FONCTIONS CARACTERISTIQUES.

L'approximation des opérateurs de dérivation par les différences finies fait jouer un rôle particulier aux fonctions caractéristiques et à leurs puissances de convolution. Nous groupons dans ce numéro quelques unes de leurs propriétés. Fixons tout d'abord quelques notations.

Nous désignerons par $q = (q_1 ,..., q_n)$, $K = (K_1 ,..., K_n)$ des multientiers; en particulier, $(m) = (m ,..., m)$ est le multientier dont les composantes sont égales à m , $e_i = (0 ,..., 0 , 1 ,..., 0)$ est le multientier dont la $i^{\text{ème}}$ composante est égale à 1 , les autres étant nulles. Nous désignerons par $\alpha = (\alpha_1 ,..., \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1 ,..., \beta_n)$ les multientiers positifs ou négatifs de Z^n .

Nous utiliserons les notations classiques, par exemple :

$p \leqslant q$ si $p_i \leqslant q_i$ pour tout i , $|q| = \sum_i |q_i|$, $q! = q_1! \dots q_n!$, etc...

Si σ est une fonction, nous poserons, si $h = (h_1 ,..., h_n)$, $h_i > 0$:

$$\sigma_h(x) = \frac{1}{h}\,\sigma\left(\frac{x}{h}\right) = \frac{1}{h_1 h_2 \dots h_n}\,\sigma\left(\frac{x_1}{h_1} , \dots , \frac{x_n}{h_n}\right)$$

et nous remarquons que :

$$(\sigma * \rho)_h = \sigma_h * \rho_h \quad ; \quad \rho_h^{\alpha} = (\delta(\alpha) * \rho)_h = \delta(\alpha h) * \rho_h = \frac{1}{h}\,\rho\left(\frac{x}{h} - \alpha\right)$$

Enfin, nous désignerons par χ la fonction caractéristique du cube $(-1 , 0)^n$, par $\chi_K = \chi * \dots * \chi$ sa puissance $K^{\text{ième}}$ de convolution par $\chi_K^{\alpha} = \delta(\alpha) * \chi_K$ sa translatée d'ordre $\alpha = (\alpha_1 ,..., \alpha_n)$.

Nous poserons $\chi_K = \chi_K^0$ et $\chi_0 = \delta$

En résumé :

$$(2\text{-}1) \qquad \chi_{K,h}^{\alpha}(x) = \bigotimes_{i=1}^{n} \chi_{K_i,h_i}^{\alpha_i}(x_i) = \bigotimes_{i=1}^{n} \frac{1}{h_i}\,\chi_{K_i}\left(\frac{x_i}{h_i} - \alpha_i\right)$$

est une fonction de support.

$$(2\text{-}2)\qquad \prod_{i=1}^{n} \left[(\alpha_i - K_i)h_i \ , \ \alpha_i \ h_i \right] = \omega^{\alpha}_{K-(1),h}$$

Nous poserons aussi :

$$(2\text{-}3)\qquad \overline{\chi}_h = T_h \chi_h \quad ; \quad \hat{\chi}_h = T_{h/2} \chi_h = T_{-h/2} \overline{\chi}_h$$

LES QUOTIENTS DIFFERENTIELS ∇^q_h .

Nous désignerons les quotients différentiels usuels par :

$$(2\text{-}4)\qquad \nabla_{h_i} = h_i^{-1} (\delta(-h_i) - \delta) * \quad ; \quad \nabla^q_h = \nabla^{q_1}_{h_1} \dots \nabla^{q_n}_{h_n} \text{ si } q = (q_1 , \dots , q_n)$$

On remarque alors que :

$$(2\text{-}5)\qquad \nabla^q_h = D^q \chi_{q,h} * = h^{-q} \sum_{k \leqslant q} (-1)^{|k|} C^k_q \delta(k - q)h *$$

On introduit de même :

$$\overline{\nabla}^q_h = D^q \overline{\chi}_{q,h} * \quad ; \quad \hat{\nabla}^q_h = D^q \hat{\chi}_{q,h} * .$$

Si $u_h = (u^{\alpha}_h)$ est une suite sur Z^n , nous poserons :

$$(2\text{-}6)\qquad (T_\gamma u_h)^{\alpha} = u^{\alpha-\gamma}_h \quad ; \quad \nabla^q_h = h^{-q} \nabla^q = h^{-q} \sum_{k \leqslant q} (-1)^{|k|} C^k_q T_{(k-q)}$$

EXPRESSIONS EXPLICITES DES FONCTIONS χ_{K+1} .

Considérons le cas où $h = 1$, $n = 1$, à partir duquel on obtient aisément le cas général. Puisque $\chi = \nabla Y$, où Y est la distribution de Heaviside, on en déduit que sur chaque intervalle $(-K-1+k , -K+k)$, la fonction χ_{K+1} est un polynôme $\beta^k_K(x)$:

$$(2\text{-}7)\qquad \begin{cases} \chi_{K+1}(x) = \sum_{k=0}^{K} \beta^k_K (x) \chi^{-K+k} (x) \quad \text{où} \\ \beta^k_K (x) = \frac{1}{K!} \sum_{q=0}^{k} (-1)^q C^q_{K+1} (x + K + 1 - q)^K . \end{cases}$$

Il sera commode d'introduire les polynômes :

$$(2\text{-}8)\qquad \Psi^k_K (x) = \delta_{(K-k)} * \beta^k_K (x) = \sum_{q=0}^{K} a_K (k,q) \frac{1}{q!} (x + 1)^q$$

où

$$(2\text{-}9)\qquad a_K(k,q) = \begin{cases} \dfrac{1}{(K-q)!} \sum_{p=0}^{k} (-1)^p\, C_{K+1}^{p}\, (k-p)^{K-q} & \text{si } 0 \leqslant k \leqslant K . \\ 0 \text{ si } k \leqslant -1 \text{ et si } k \geqslant K+1 \end{cases}$$

On remarque alors que :

$$(2\text{-}10)\qquad a_K(k\ ,\ q) = D^q\, \chi_{K+1}\ (-K-1+k) = D^q\, \psi_K^k\ (-1)$$

et que $\sum_{k=0}^{K} \psi_K^k\ (x) = 1$ puisque les χ_{K+1}^{α} forment une partition de l'unité.

On utilisera, parmi d'autres, les propriétés suivantes des coefficients $a_K(k\ ,\ q)$:

$$(2\text{-}11)\qquad \begin{cases} \text{i)} & \sum_{k=0}^{K} a_K(k\ ,\ q) = \begin{cases} 0 \text{ si } q = 1\ ,\ldots,\ K . \\ 1 \text{ si } q = 0 . \end{cases} \\ \text{ii)} & a_K(0\ ,\ q) = \begin{cases} 0 \text{ si } q \leqslant K-1 \\ 1 \text{ si } q = K \end{cases} \\ \text{iii)} & a_K(k\ ,\ K) = (-1)^{|k|}\, C_K^k \\ \text{iv)} & a_K(k\ ,\ q) = \sum_{j=0}^{p} (-1)^{|j|}\, C_p^j\, a_{K-p}\ (k-j\ ,\ q-p) \\ \text{v)} & a_K(k\ ,\ q) = (-1)^{|q|}\, a_K\ (K+1-k\ ,\ q) \end{cases}$$

LES QUOTIENTS DIFFERENTIELS Q_K^q .

Nous poserons, si $K = (K_1\ ,\ldots,\ K_n)$ est un multientier

$$(2\text{-}12)\qquad Q_{K,h}^q = h^{-q} \sum_{k=0}^{K} a_K(k\ ,\ q)\ \delta(-K+k) \ *$$

où

$$a_K(k\ ,\ q) = \prod_{i=1}^{n} a_{K_i}(k_i\ ,\ q_i)$$

Si $u_h = (u_h^{\alpha})$ est une suite, nous poserons :

$$(Q_K^q\ u_h)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{m} a_K(k\ ,\ q) u_h^{\alpha+K-k}.$$

Nous verrons que ces opérateurs sont des quotients différentiels. On déduit de (2-11) que :

$$(2\text{-}13)\quad \begin{cases} \text{i)} & Q_K^q = Q_{K-k}^{q-k}\,\nabla^k = \nabla^k\,Q_{K-k}^{q-k} \\ \text{ii)} & Q_K^K = \nabla^K \\ \text{iii)} & Q_1^o = 1 \ , \ Q_1^1 = \nabla \quad (\text{si } n = 1) \end{cases}$$

LES FONCTIONS $\zeta_K(x)$.

LEMME 2-1.

Il existe une fonction $\zeta_K(x) = \chi(x) \sum_{q=0}^{K} \zeta_K^q \frac{1}{q!} (x+1)^q$ *vérifiant :*

$$(2\text{-}14)\quad h < \chi_{K+1,h}^{\alpha} \ , \ \zeta_{K,h}^{\beta} > = \begin{cases} 0 & \text{si } \alpha \neq \beta \\ 1 & \text{si } \alpha = \beta \end{cases} \ ; \ \int \zeta_K(x)\,dx = 1$$

Les coefficients ζ_K^q *sont déterminés par les* K *relations :*

$$(2\text{-}15)\quad \sum_{q=0}^{K} \zeta_K^q \left(\sum_{p=0}^{K} \frac{a_K(k\ ,\ p)}{q!p!(p+q+1)} \right) = \begin{cases} 0 & \text{si } k = 1\ ,\ldots,\ K-1 \\ 1 & \text{si } k = K \end{cases}$$

On remarque tout d'abord que :

$$h < \chi_{K,h}^{\alpha} \ , \ \zeta_{K,h}^{\beta} > = < \chi_K^{\alpha-\beta} \ , \ \zeta_K >$$

Il suffit donc de vérifier que :

$$\int_{-1}^{0} \zeta_K(x)\,\psi_K^k(x)\,dx = \sum_{q=0}^{K} \zeta_K^q \int_{-1}^{0} \frac{(x+1)^q}{q!}\,\psi_K^k(x)\,dx = \begin{cases} 0 \text{ si } k \leqslant K-1 \\ 1 \text{ si } k = K \end{cases}$$

Puisque les polynômes $(x+1)^q$ et $\psi_K^k(x)$ sont linéairement indépendants, la matrice des coefficients $\int_{-1}^{0} (x+1)^q\,\psi_K^k(x)\,dx$ est inversible et les coefficients ζ_K^q sont déterminés de façon unique.

On déduit alors (2-15) de (2-8) et puisque la somme des polynômes $\psi_K^k(x)$ est égale à 1 , on en déduit que ζ_K est une fonction de masse totale égale à 1 .

REMARQUE 2-1.

On peut plus généralement montrer l'existence d'une fonction ζ_K indéfiniment différentiable à support dans (-1 , 0) vérifiant les propriétés (2-14). Ce lemme exprime alors que les fonctions χ_K^{α} sont topologiquement libres dans l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions.

2.2. APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV $W^{m,P}$

Nous allons construire des approximations des espaces de Sobolev $W^{m,P} = W^{m,P}(R^n)$. Ce sont des espaces de Banach pour les normes

$$(2\text{-}16)\quad ||u||_{m,P} = \Big(\sum_{|q|\leq m} |D^q u|_P^P \Big)^{1/P} \quad : \quad |u|_P = \Big(\int |u(x)|^P \, dx \Big)^{1/P} .$$

Nous désignerons par $W_h^{m,P}$ l'espace des suites de puissance $P^{\text{ième}}$ sommables sur Z^n muni de la norme :

$$(2\text{-}17)\quad \begin{cases} ||u_h||_{h,m,P} = \Big(\sum_{|q|\leq m} |\nabla_h^q u_h|_P^P \Big)^{1/P} \\ |u_h|_{h,P} = \sqrt[P]{h} \,/\, \sqrt{h} \;\; \Big(\sum_{\alpha} |u_h^\alpha|^P \Big)^{1/P} \end{cases}$$

Considérons les opérateurs de prolongement et de restrictions suivants : Si K est un multientier $K = (K_1 , \ldots , K_n)$, nous poserons :

$$(2\text{-}18)\quad \begin{cases} p_h^K u_h = \sqrt{h} \sum_{\alpha} u_h^\alpha \chi^\alpha_{K+(1),h} \\ r_h^{*K} \phi = \Big(\sqrt{h} \int \phi(x) \, \chi^\alpha_{K+(1),h}(x) \, dx \Big)_\alpha \\ r_h^K \phi = \Big(\sqrt{h} \int \phi(x) \, \zeta^\alpha_{K,h}(x) \, dx \Big)_\alpha \end{cases}$$

Désignons par r_h l'une des restrictions r_h^{*L} , r_h^K .
Considérons alors les approximations :

$$(2\text{-}19)\quad A_h^K (W^{m,P}) = (W^{m,P} , W_h^{m,P} , p_h^K , r_h)$$

THEOREME 2-1.

Si $K \geq (m)$ *et* $L \geq 0$, *les opérateurs* p_h^K , r_h^{*L} *et* r_h^K *vérifient les propriétés suivantes.*

Les prolongements p_h^K *s'explicitent ainsi :*

$$(2\text{-}20)\quad p_h^K u_h = h^{+1/2} \sum_{\alpha} \Big(\sum_{q\leq K} (Q_K^q u_h)^\alpha \frac{1}{q\,!} \Big(\frac{x}{h} - \alpha + 1 \Big)^q \Big) \chi_h^\alpha$$

Les opérateurs de dérivation et les quotients différentiels commutent avec ces opérateurs :

$$(2\text{-}21)\quad \begin{cases} \text{i)}\ D^q\, p_h^K\, u_h = p_h^{K-q}\,(\nabla_h^q\, u_h)\ ;\ \nabla_h^q\, r_h\, \phi = r_h\,(\nabla_h^q\, \phi) \\ \text{ii)}\ r_h^{*L}\, D^q\, p_h^K\, u_h = h^{-q}\, T_{+L}\, Q_{K+L+(1)}^q\, u_h \end{cases}$$

Les prolongements p_h^K *sont des isomorphismes et de plus :*

$$(2\text{-}22)\quad r_h^K\, p_h^K\, u_h = u_h\ ;\ p_h^K\, r_h^K \text{ est un projecteur de } W^{m,P}$$

Enfin, les approximations de $W^{m,P}$ *sont stables et convergentes :*

$$(2\text{-}23)\quad \begin{cases} \text{i)}\ \|p_h^K\, u_h\|_{m,P} \leq \|u_h\|_{h,m,P} \leq m\|p_h^K\, u_h\|_{m,P} \\ \text{ii)}\ \|r_h\, \phi\|_{h,m,P} \leq m\|\phi\|_{m,P} \end{cases}$$

$$(2\text{-}24)\quad \|\phi - p_h^K\, r_h\, \phi\|_P \leq c\,\Big(\sum_{|q|\leq m} \omega_P^P\,(D^q\,\phi\ .\ h)\Big)^{1/P}$$

De plus les normes de 1^P *vérifient :*

$$(2\text{-}25)\quad \|u_h\|_{h,m,P} \leq c\,\Big(\sum_{|q|\leq m} h^{-Pq}\Big)^{1/P}\, |u_h|_{h,P}\ .$$

REMARQUES 2-2.

Si $K = L$, *les approximations* $(W^{m,P}$, $W_h^{m,P}$, p_h^K , $r_h^{*K})$ *sont autoadjointes, stables et convergentes.*

D'après (2-13) iii) , on voit que pour $K = (1)$,

$$p_h^{(1)}\, u_h = h^{-1/2} \sum_\alpha \Big(u_h^\alpha + \sum_{0\neq q\leq (1)} (\nabla^q\, u_h)^\alpha\, \Big(\frac{x}{h} - \alpha + 1\Big)^q\Big)\theta_h^\alpha$$

Ce prolongement a été obtenu sous cette forme par O.A. LADYJENSKAIA [1] . On trouvera dans J. CEA [2] les prolongements qui ont la propriété supplémentaire d'interpolation :

$$D^q\, p_h\, u_h\,((\alpha - 1)\, h) = (\nabla_h^q\, u_h)^\alpha \qquad \text{pour } q \leq K$$

On voit d'après (2-21) ii) que les opérateurs Q_K^q sont des restrictions des opérateurs de dérivation D^q . En particulier, les opérateurs Q_K^o , restrictions de l'identité, sont des opérateurs de "lissage" (ou de régularisation discrète), puisque, d'après (2-11) i) , $(Q_K^o\, u_h)^\alpha$ est un barycentre des éléments $u_h^{\alpha+k} (0 \leq k \leq K)$.

On déduit enfin de l'inégalité (2-24) que :

$$(2\text{-}26) \qquad ||\phi - p_h^K r_h^{*L} \phi||_{m,P} \leqslant c\, h\, ||\phi||_{m+1,P}$$

Les fonctions $p_h^K u_h$ sont des fonctions dont les restrictions à chaque intervalle $(\alpha\, h\ ,\ (\alpha + 1)\, h\ )$ (dans le cas $n = 1$) sont des polynômes de degré K . Ce sont des exemples de "Spline functions" introduites par I.J. SCHOENBERG [1] et étudiées par de nombreux auteurs à propos du problème d'interpolation optimale (cf. aussi J.P. AUBIN [7]). Le théorème 2-1 énonce donc (dans le cas d'un réseau régulier) les propriétés des dérivées des "spline functions" et précise les propriétés d'approximation de ces fonctions.

On trouvera dans J.P. AUBIN [3] une évaluation plus précise des erreurs de troncature : il existe des restrictions s_h^K telles que :

$$||D^q\, p_h^K\, s_h^K\, \phi - D^q\, \phi||_P \leqslant c\, h^{K+(1)-q}\ ||D^{K+(1)}\ \phi||_P \quad \text{si} \quad q \leqslant K + (1)$$

On peut obtenir à partir de ces approximations d'autres approximations de $W^{m,P}$ en utilisant la proposition 1-7 du n° 1-10 du §1 du chapitre I en prenant pour opérateurs P_h et R_h , des opérateurs de convolution par $\sigma_h(x) = \frac{1}{h}\, \sigma(\frac{x}{h})$, où σ est une fonction positive à support compact de masse totale égale à 1 . soit des opérateurs de multiplication par des fonctions γ_h à support compact, convergeant vers 1 dans $W^{m,\infty}$, soit des difféomorphismes réciproques, ce qui donne des approximations sur des réseaux irréguliers. On peut naturellement varier les exemples à l'infini.

DEMONSTRATION DU THEOREME 2-1.

a) EXPRESSION EXPLICITE DE $p_h^K u_h$.

Faisons $h = 1$. On déduit alors cette identité de la définition des polynômes $\psi_K^k(x)$ et de (2-8) . Puisque :

$$(2\text{-}27) \qquad \chi_{K+1}^{\alpha} = \sum_{k \leqslant K} \delta(-K + k + \alpha) * (\psi_K^k(x)\ \chi(x)\ )$$

il en résulte que :

$$p^K u = \sum_{\alpha} u^{\alpha}\, \chi_{K+1}^{\alpha} = \sum_{\alpha} u^{\alpha} \sum_{k \leqslant K} \delta(-K + k + \alpha) * (\psi_K^k\, \chi) =$$

$$= \sum_{\alpha} {}^{\cdot}\Big(\sum_{k \leqslant K} u^{\alpha+K-k}\ \psi_K^k(x - \alpha)\ \Big)\chi^{\alpha} =$$

$$= \sum_{\alpha} \sum_{k \leqslant K} \sum_{q \leqslant K} a_K(k,q)\, u^{\alpha+K-k}\ \frac{1}{q\,!}\ (x + 1 - \alpha)^q\ \chi^{\alpha}$$

b) PROPRIETES DE COMMUTATIVITE.

On remarque tout d'abord que les opérateurs de translation commuttent avec les opérateurs de prolongement et de restriction :

$$\tau_{h\beta} p_h^K u_h = \sum_\alpha u_h^\alpha \chi_{K+(1),h}^{\alpha+\beta} = \sum_\alpha u_h^{\alpha-\beta} \chi_{K+(1),h}^{\alpha} = p_h^K (\tau_\beta u_h)$$

Si $r_h \phi = \left(\int \phi S_h^\alpha dx \right)_\alpha$; $S_h^\alpha = \delta(\alpha h) * S_h$:

$$(\tau_\beta r_h \phi)^\alpha = \left(\int \phi S_h^{\alpha-\beta} dx\right) = \left(\int \tau_{\beta h} \phi S_h^\alpha dx\right) = (r_h \tau_{\beta h} \phi)^\alpha$$

Il en résulte alors que les quotients différentiels commuttent :

$$(2\text{-}28) \qquad \nabla_h^q p_h^K u_h = p_h^K \nabla_h^q u_h \quad ; \quad \nabla_h^q r_h \phi = r_h \nabla_h^q \phi$$

D'autre part, puisque d'après (2-5) , $D^q \chi_K = \nabla^q \chi_{K-q}$, on en déduit (2-21) i). Montrons maintenant que $r_h^{*L} p_h^K = Q_{K+L+1}^o \tau_L$.

En effet, $(r_h^{*L} p_h^K u_h)^\alpha = h \sum_\beta \left[\int \chi_{K+(1),h}^\beta (x) \chi_{L+(1),h}^\alpha (x) dx \right] u_h^\beta$

Mais puisque $\int \sigma \phi = \sigma * \check{\phi} (o)$, où $\check{\phi}(x) = \phi(-x)$, on en déduit, d'après (2-10), que :

$$h \int \chi_{K+(1),h}^\beta (x) \chi_{L+(1),h}^\alpha (x) dx = \chi_{K+L+(2)}^{L+1+\beta-\alpha} (o) = a_{K+L+(1)} (K + (1) + \alpha - \beta , o)$$

Donc :

$$(r_h^{*L} p_h^K u_h)^\alpha = \sum_\beta a_{K+L+(1)} (K + (1) + \alpha - \beta , o) u_h^\beta =$$

$$= \sum_{k \leq K} a_{K+L+(1)} (k , o) u_h^{K+L+(1)+\alpha-L-k} = (\tau_L Q_{K+L+(1)}^o u_h)^\alpha$$

On en déduit que :

$$r_h^{*L} D^q p_h^K = r_h^{*L} p_h^{K-q} \nabla_h^q = Q_{K+L+(1)-q}^o (\nabla_h^q) = h^{-q} Q_{K+L+(1)}^q \quad \text{d'après (2-13) i).}$$

Nous allons montrer que r_h^K est un inverse à gauche de p_h^K , ce qui montrera en particulier que p_h^K est un isomorphisme et que $p_h^K r_h^K$ est un projecteur continu de $W^{m,P}$.

Mais :

$$(r_h^K p_h^K u_h)^\alpha = h \sum_\beta u_h^\beta \int \chi_{K+(1),h}^\beta (x) \zeta_{K,h}^\alpha (x) dx = u_h^\alpha \quad \text{d'après le lemme 1-2 .}$$

c) STABILITE DES PROLONGEMENTS ET DES RESTRICTIONS.

Remarquons tout d'abord que

$$(2\text{-}29) \qquad p_h^K u_h = \chi_{K,h} * p_h^o u_h \quad ; \quad p_h^o u_h = h^{1/2} \sum_\alpha u_h^\alpha \chi_h^\alpha (x)$$

Montrons que :

$$(2\text{-}30) \qquad |p_h^o u_h|_P \leq |u_h|_{h,P}$$

En effet :

$$\int |p_h u_h|^P dx \leq h^{P/2} \int \sum_\alpha |u_h^\alpha|^P |\chi_h^\alpha (x)|^P dx \leq h^{1-P/2} \sum_\alpha |u_h^\alpha|^P$$

Donc, puisque $\int \chi_{K,h} (x)\, dx = 1$, il en résulte que pour tout $|q| \leq m$:

$$(2\text{-}31) \qquad |D^q p_h^K u_h|_P = |\chi_{K-q,h} * p_h^o (\nabla_h^q u_h)|_P \leq |p_h^o \nabla_h^q u_h|_P$$

il en résulte que $||p_h^K u_h||_{m,P} \leq ||u_h||_{h,m,P}$.

De même :

$$(2\text{-}32) \qquad |r_h \phi|_{h,P} \leq m|\phi|_P$$

En effet, soit $S_h^\alpha (x)$ l'une des fonctions $\chi_{L+(1),h}^\alpha (x)$, $\zeta_{K,h}^\alpha (x)$, qui sont à support compact et de masse totale égale à 1 .

Soit m_1 la borne supérieure de $\sum_\alpha S(x - \alpha)$ et m_2 la norme de $S(x)$ dans L^P , $m_P = m_1 m_2^{P-1}$. On déduit (2-32) de l'inégalité :

$$\sum_\alpha \int |\phi\, S_h^\alpha (x)\, dx|^P \leq \sum_\alpha \left(\int |\phi(x)|^P |S_h^\alpha (x)| dx \right) \left(\int |S_h^\alpha (x)| dx \right)^{P/P'} \leq$$

$$\leq m_P h^{-1} \int |\phi(x)|^P dx$$

Il en résulte donc que :

$$|\nabla_h^q r_h \phi|_{h,P} \leq |r_h (\nabla_h^q \phi)|_P \leq m_P |\nabla_h^q \phi|_P \leq m_P |D^q \phi|_P$$

puisque $\nabla_h^q \phi = \chi_{q,h} * D^q \phi$.

De plus, en prenant $r_h = r_h^{K-q}$, il vient :

$$|\nabla_h^q u_h|_{h,P} = |\nabla_h^q r_h^{K-q} p_h^{K-q} u_h|_h = |r_h^{K-q} D^q p_h^K u_h| \leq m_P |D^q p_h^K u_h|_P$$

ce qui montre que :

(2-33) $\|u_h\|_{h,m,P} \leq m \|p_h^K u_h\|_{m,P}$; m indépendante de h .

D'autre part, (2-25) est évident puisque :

(2-34) $|\nabla_h^q u_h|_P \leq h^{-q} h^q |\nabla_h^q u_h|_P \leq c\, h^{-q} |u_h|$

d) CONVERGENCE DES APPROXIMATIONS.

On remarque que :

(2-35) $$\begin{cases} |D^q(\phi - p_h^K r_h \phi)|_P \leq |D^q \phi - p_h^{K-q} r_h D^q \phi|_P + \\ \qquad + |p_h^{K-q} r_h (D^q \phi - \chi_{q,h} * D^q \phi)|_P \end{cases}$$

Il suffit alors de montrer que :

(2-36) $|\phi - p_h^K r_h \phi|_P \leq c\, \omega_P (\phi , h)$

(2-37) $|\phi - \chi_{q,h} * \phi|_P \leq c\, \omega_P (\phi , h)$

Montrons tout d'abord (2-36) . Si $S_h^\alpha = \chi_{L,h}^\alpha$ ou $\zeta_{K,h}^\alpha$:

(2-38) $\phi(x) = \sum_\alpha \left(\int \phi(x)\, S_h^\alpha (y)\, dy \right) h\, \chi_{K+(1),h}^\alpha$

On en déduit que :

(2-39) $\phi(x) - p_h r_h \phi(x) = \chi_{K,h} * \tau_h (\phi)$

où

(2-40) $\tau_h \phi = \sum_\alpha \left(\int (\phi(x) - \phi(y))\, S_h^\alpha(y)\, dy \right) h\, \chi_h^\alpha$

Il suffit de montrer que pour toute ϕ continue :

(2-41) $|\tau_h \phi|_P \leq c\, \omega_P (\phi, h)$.

Mais

$$\int dx |\tau_h \phi|^P \leq \sum_\alpha \left| \int |\phi(x) - \phi(y)|\, |S_h^\alpha(y)|\, dy \right|^P h\, \chi_h^\alpha\, dx \leq$$

$$\leq m \sum_\alpha \int dx\, h\, \chi_h^\alpha \sup_{|x-y| \leq ch} |\phi(x) - \phi(y)|^P = m\, \omega_P^P (\phi , ch) .$$

Démontrons maintenant (2-37) , en posant $\sigma = \chi_q$. Si ϕ est continue :

$$|\sigma_h * \phi - \phi|_P^P \leq h^{-P} \int dx \, \Big| \int_{\omega_h} \sigma\Big(\frac{x}{h}\Big) \, (\phi(t - x) - \phi(x)) \, dt \Big|^P \leq$$

$$\leq \sup_{t \in \omega_h} \int |\phi(t - x) - \phi(x)|^P \, dx = \omega_P^P (\phi , \omega_h) \leq c \, \omega_P^P (\phi , h)$$

On en déduit (2-37) puisque les fonctions continues sont données dans L^P .

Puisque $||p_h^K u_h||_{m,P} = ||u_h||_{h,m,P} \leq m||p_h^K u_h||_{m,P}$, nous en déduisons le

COROLLAIRE 2-1. (Inégalités de Sobolev discrètes).

Si $\frac{1}{q} = \frac{1}{P} - \frac{m}{n} > 0$, *alors*

(2-42) $|u_h|_{h,q} \leq c||u_h||_{h,m,P}$, *où* c *est indépendante de* h .

Si $m - \frac{P}{n} = k + \theta$, k *entier* ≥ 0 , $0 < \theta \leq 1$, *pour tout ensemble fini* R_h *de* $\mathbb{Z}^n$, *nous obtenons* :

(2-43) $\sup_{\alpha \in R_h} \sup_{|r| \leq k} |\nabla_h^r u_h^\alpha| \leq c||u_h||_{h,m,p}$ *où* c *est indépendante de* h .

Ces inégalités résultent des inégalités de Sobolev sur les fonctions :

$|\phi|_q \leq c||\phi||_{m,P}$ si $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{m}{n} > 0$ et $\sup_K \sup_{|r| \leq k} |D^r \phi| \leq c||\phi||_{m,P}$

si $m - P/n = k + \theta$.

REMARQUE 2-3.

On peut donner des démonstrations directes de ces inégalités, soit en adaptant la démonstration initiale de Sobolev (cf. SOBOLEV [3] [2]),soit en adaptant celle de GAGLIARDO [1] .

On démontre de la même manière des inégalités discrètes analogues aux inégalités de J.L. LIONS [4] , sur les fonctions à valeurs vectorielles, généralisant les inégalités de GAGLIARDO - NIRENBERG .

2-3. APPROXIMATION DES ESPACES DE DISTRIBUTIONS.

Soit X un espace de distributions. Nous désignerons par X^m l'espace des distributions de X dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent à X. Nous munirons l'espace X^m de la topologie la moins fine rendant continues les dérivations D^q. On peut prendre par exemple pour X les espaces de fonctions continues du §1.

Donnons-nous des approximations discrètes de l'espace X :

$$(2\text{-}44) \quad A_h(X) = (X , X_h , p_h , r_h) = (X , \sigma_h , S_h)$$

où $\sigma_h = (\sigma_h^\alpha)_\alpha$ est une suite de X, $S_h = (S_h^\alpha)_\alpha$ une suite de X'. On démontre de la même manière qu'au numéro précédent le :

THEOREME 2-2.

Supposons que :

$$(2\text{-}45) \quad \sigma_h^\alpha = \delta(\alpha\, h) * \sigma_h \quad ; \quad S_h^\alpha = \delta(\alpha\, h) * S_h$$

Si les approximations $A_h(X)$ sont stables et convergentes, les approximations de X^m :

$$(2\text{-}46) \quad A_h(X^m) = (X^m , X_h , p_h^K , r_h) \quad ; \quad p_h^K = X_h^K * p_h$$

sont également stables et convergentes si $K \geq (m)$.

Plus généralement, soit $G(t)$ un groupe continu d'opérateurs de $L(X , X)$, A son générateur infinitésimal, $D(A)$ son domaine.

Si θ est une fonction et ϕ un élément de X, nous poserons :

$$G(\theta)\,\phi = \int_{-\infty}^{+\infty} G(t)\,\theta(t)\,\phi\, dt$$

THEOREME 2-3.

Supposons que :

$$(2\text{-}47) \quad \sigma_h^\alpha = G(\alpha\, h)\ \sigma_h \quad ; \quad S_h^\alpha = G(\alpha\, h)\ S_h$$

Si les approximations $A_h(X)$ sont stables et convergentes, les approximations discrètes du domaine $D(A^m)$ de A^m

$$A_h(D(A^m)) = (D\,(A^m) , X_h , p_h^K , r_h) \quad ; \quad p_h^K = G\,(X_h^K)\ p_h$$

sont également stables et convergentes si $K \geqslant m$.

On déduit ce théorème de l'identité :

$$(2\text{-}48)\quad A\, G(\chi_h) = G(-h) - G(o)$$

La démonstration est alors analogue à celle du théorème 2-1.

Si X est un espace de fonctions continues ou un espace L^P et si Y est la distribution de Heaviside, les fonctions :

$$\theta_h^\alpha = G(\alpha h)\,\theta_h \quad ; \quad \theta_h = \left[G(o) - G(h)\right] Y$$

forment une partition de l'unité. On peut alors construire, à l'aide des théorèmes du § 1 , des approximations de X vérifiant (2-45) stables et convergentes.

§3. APPROXIMATION DES ESPACES DE SOBOLEV SUR UN OUVERT Ω .

Nous déduisons du théorème 2-1 du §2 la construction d'approximations et d'approximations partielles des espaces de Sobolev $W_o^{m,P}(\Omega)$ (n° 3-2) et $W^{m,P}(\Omega)$ (n° 3-3) sur un ouvert Ω . Il faut pour cela définir des réseaux associés à un ouvert Ω (n° 3-1) . Au n° 3-4 , on construit des approximations de sous-ensembles convexes des espaces de Sobolev, en vue des applications aux inéquations variationnelles.

On suppose connu le § 2 de ce chapitre.

Rappelons que $W^{m,P}(\Omega)$ est l'espace des fonctions u de $L^P(\Omega)$ dont les dérivées jusqu'à l'ordre m appartiennent encore à $L^P(\Omega)$, que $W^{q,P}(\Omega)$ est l'espace des fonctions u de $L^P(\Omega)$ dont la dérivée d'ordre $q = (q_1, \ldots, q_n)$ appartient à $L^P(\Omega)$; $W^{m,P}(\Omega)$ est l'intersection des espaces $W^{q,P}(\Omega)$ pour $|q| \leqslant m$. On désigne par $W_o^{m,P}(\Omega)$ (resp. $W_o^{q,P}(\Omega)$) l'adhérence dans $W^{m,P}(\Omega)$ (resp. $W^{q,P}(\Omega)$) des fonctions à support compact dans Ω .

3-1. LES RESEAUX $R_h^K(\Omega)$.

Soient Ω un ouvert de $\mathbb{R}^n$, de frontière Γ , $h = (h_1, \ldots, h_n)$ le pas du maillage, K un multientier. Nous allons associer à Ω , h , K des réseaux, c'est-à-dire des sous-ensembles de Z^n . Rappelons que nous avons posé : (§2 , (2-2))

$$(3\text{-}1)\quad \begin{cases} \omega_{K,h}^\alpha = \prod_{i=1}^n \left[(\alpha_i - K_i - 1)h_i\ ,\ \alpha_i h_i\ )\right] = \text{support de } \chi_{K+(1),h}^\alpha \\ \qquad = \bigcup_{k \leqslant K} \tau_{-k}\, \omega_h^\alpha = \bigcup_{k \leqslant K} \omega_h^{\alpha-k} \quad ; \quad (\omega_h^\alpha = \omega_{o,h}^\alpha\ ) \end{cases}$$

Si E est un sous-ensemble de R^n , nous poserons :

(3-2) $\mathcal{R}_h^K(E) = \{ \alpha \in Z^n \text{ tels que } \omega_{K,h}^{\alpha} \cap E \neq \Phi \}$

En particulier, il est clair que d'après (3-1) :

(3-3) $\mathcal{R}_h^K(E) = \bigcup_{k \leq K} \tau_k \mathcal{R}_h(E)$

Nous considérerons les réseaux $\mathcal{R}_h^K(\Omega)$, $\mathcal{R}_h^L(\Gamma)$, etc...

Nous poserons :

(3-4) $\mathcal{R}_h^K(\Omega ; \Gamma) = \mathcal{R}_h^K(\Omega) - \mathcal{R}_h^K(\Gamma)$.

LEMME 3-1.

Soit $u_h = (u_h^{\alpha})$ *une suite définie sur* $\mathcal{R}_h^K(\Omega)$. *Les quotients différentiels* $Q_K^q u_h$ *(cf. §2 , n° 2-1) sont définis sur* $\mathcal{R}_h(\Omega)$ *(pour* $q \leq K$ *)* .

En effet, si $\alpha \in \mathcal{R}_h(\Omega)$:

(3-5) $(Q_K^q u_h)^{\alpha} = \sum_{k \leq K} a_K(K - k , q) u_h^{\alpha+k}$

et les indices $\alpha + k$ appartiennent à $\mathcal{R}_h^K(\Omega)$. En particulier, les quotients $\nabla^K = Q_K^K$ sont définis sur $\mathcal{R}_h(\Omega)$.

THEOREME 3-1.

Si $p_h^K u_h = 0$ *sur* Ω , *alors* u_h *est nulle sur* $\mathcal{R}_h^K(\Omega)$.
Si les suites $Q_K^q u_h$ *sont nulles sur* $\mathcal{R}_h(\Omega)$ *pour* $q \leq K$, *la suite* u_h *est nulle sur* $\mathcal{R}_h^K(\Omega)$.

En effet, d'après le théorème 2-1 du §2 :

$$p_h^K u_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}_h(\Omega)} \sum_{q \leq K} u_h^{\alpha+q} \psi_K^{K-q}\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) h^{1/2} \chi_h^{\alpha}$$

Si $p_h^K u_h = 0$, pour tout $\alpha \in \mathcal{R}_h(\Omega)$, nous avons :

$$\sum_{q \leq K} u_h^{\alpha+q} \psi_K^{K-q}\left(\frac{x}{h} - \alpha\right) = 0 \text{ sur } \omega_h^{\alpha} \quad ; \quad \alpha \in \mathcal{R}_h(\Omega)$$

Les polynômes $\psi_K^{K-q}\left(\frac{x}{h} - \alpha\right)$ étant linéairement indépendants, cela entraîne que :

$$u_h^{\alpha+q} = 0 \quad \text{si} \quad \alpha \in \mathcal{R}_h(\Omega) \quad \text{et si} \quad q \leq K .$$

D'après (3-3), si $\beta \in \mathcal{R}_h^K(\Omega)$, il existe $\alpha \in \mathcal{R}(\Omega)$ et $q \leq K$ tel que $\beta = \alpha + q$. Donc $u_h^\beta = 0$ quel que soit $\beta \in \mathcal{R}_h^K(\Omega)$.

D'autre part, puisque :

$$p_h^K u_h = \sum_{\alpha \in \mathcal{R}(\Omega)} \sum_{q \leq K} (Q_K^q u_h)^\alpha \frac{\left(\frac{x}{h} - \alpha + 1\right)^q}{q!} h^{1/2} \chi_h^\alpha$$

si les $Q_K^q u_h$ sont nulles sur $\mathcal{R}_h(\Omega)$, $p_h^K u_h$ est nulle sur Ω, donc u_h est nulle sur $\mathcal{R}_h^K(\Omega)$ d'après ce qui précède, ce qui démontre le théorème.

En particulier :

COROLLAIRE 3-1.

Sur l'espace des suites sur $\mathcal{R}_h^K(\Omega)$, les expressions

$$||p_h^K u_h||_{m,P,\Omega} \quad \textit{sont des normes .}$$

3-2. APPROXIMATIONS DES ESPACES $W_o^{m,P}(\Omega)$.

Nous allons construire diverses approximations de l'espace de Sobolev $W_o^{m,P}(\Omega)$ en utilisant la construction des approximations de l'espace $W^{m,P}(R^n)$.

Soient K et L deux multientiers ; considérons le réseau :

(3-6) $\mathcal{R}_h = \mathcal{R}_h^K(\Omega ; \Gamma)$

défini au n° 3-1.

Nous désignerons par :

(3-7) $W_{o,h}^{m,P}(\Omega ; K)$

l'espace des suites $u_h = (u_h^\alpha)$ nulles en dehors de $\mathcal{R}_h^K(\Omega ; \Gamma)$, muni de la norme $||u_h||_{h,m,P}$, définie au §2 n° 2 (2,17). Si $K \geq (m)$, le prolongement $p_h^K u_h$ de la suite u_h, défini au §2 n° 2 (2,18), est à support compact dans Ω.

Nous allons définir une restriction r_h^{*L} de $W_o^{m,P}(\Omega)$ dans $W_{o,h}^{m,P}(\Omega ; K)$ par :

$$(3\text{-}8)\quad (r_h^{*L}\,\phi) = \begin{cases} \left(\sqrt{h}\int \phi(x)\,\chi^{\alpha}_{K+(1),h}(x)\,dx\right) & \text{si } \alpha \in \mathcal{R}_h^K(\Omega\,;\,\Gamma) \\ 0 & \text{si } \alpha \notin \mathcal{R}_h^K(\Omega\,;\,\Gamma) \end{cases}$$

Nous allons étudier les approximations :

$$(3\text{-}9)\quad A_h^{K,L}(W_o^{m,P}(\Omega)) = (W_o^{m,P}(\Omega)\,,\, W_{o,h}^{m,P}(\Omega\,;\,K)\,;\, p_h^K\,,\, r_h^{*L}) \text{ de } W_o^{m,P}(\Omega).$$

Posons :

$$(3\text{-}10)\quad \mathcal{R}_h^m = \bigcap_{|k|\le m} \tau_{-k}\,\mathcal{R}_h\,;\quad \mathcal{S}_h^m = \mathcal{R}_h - \mathcal{R}_h^m\,;\quad \Omega^m(h) = \bigcup_{\alpha\in\mathcal{S}_h^m} \omega^{\alpha}_{L,h}$$

Supposons que l'ouvert Ω vérifie la propriété de régularité suivante :

$$(3\text{-}11)\quad \begin{cases} \text{Il existe } D = (D_1\,,\ldots,D_n) \text{ tel que} \\ x - k\,h\,D \notin \Omega \text{ pour tout } |k| \le m \text{ et pour tout } x \in \Omega^m(h) \end{cases}$$

THEOREME 3-2.

Supposons l'hypothèse (3,11) satisfaite. Les approximations $A_h^{K,L}(W_o^{m,P}(\Omega))$ *sont alors stables et convergentes.*

Si $K = L$, *ces approximations sont de plus autoadjointes.*

La stabilité des prolongements résulte du théorème 2-1, puisque :

$$\|p_h^K u_h\|_{W_o^{m,P}(\Omega)} = \|p_h^K u_h\|_{W^{m,P}(\mathbb{R}^n)} \le \|u_h\|_{h,m,P}$$

Nous allons montrer que les restrictions sont stables, c'est-à-dire qu'il existe une constante C indépendante de h telle que :

$$(3\text{-}12)\quad \|r_h^{*L}\,\phi\|_{h,m,P} \le m\|p_h^K\,r_h^{*L}\,\phi\|_{m,P} \le C\|\phi\|_{m,P}\,.$$

Mais :

$$(3\text{-}13)\quad p_h^K\,r_h^{*L}\,\phi = \sum_{\alpha\in\mathcal{R}_h}\left(\int_\Omega \phi\,\chi^{\alpha}_{L+(1),h}\,dx\right)\chi_{K,h} * \theta_h^{\alpha}(x)$$

où θ_h^{α} est la fonction caractéristique du pavé ω_h^{α}.

La dérivée d'ordre $k = (k_1\,,\ldots,k_n)$, $|k| \le m$ de $p_h^K\,r_h^{*L}$ s'écrit :

$$(3\text{-}14)\quad D^k\,p_h^K\,r_h^{*L}\,\phi = X_h + Y_h\,.$$

où

$$(3\text{-}15)\qquad \chi_h = \sum_{\alpha\in R_h^m} \Big(\int_\Omega D^k \phi(x) \cdot \chi^\alpha_{L+(1),h} * \bar{\chi}_{k,h}(x)\, dx \Big)\, \chi_{K-k,h} * \theta^\alpha_h (x)$$

et

$$(3\text{-}16)\qquad Y_h = \sum_{\alpha\in S_h^m} h^{-k} \Big\{ \sum_{\ell\in k(\alpha)} (-1)^\ell C^\ell_k \int_\Omega \phi(x)\, \chi^{\alpha-\ell}_{L+(1),h}(x)\, dx \Big\}\, \chi_{K,h} * \theta^\alpha_h (x)$$

où $k(\alpha)$ est l'ensemble des indices $\alpha - \ell$ qui appartiennent à R_h pour $|\ell| \leq k$

Nous savons que :

$$(3\text{-}17)\qquad \int_\Omega |\chi_h|^P dx \leq \int_\Omega |D^k \phi(x)|^P dx$$

Il nous reste à évaluer $\int_\Omega |Y_h|^P dx$

Soit $\Omega^m(h)$ le sous-ensemble de Ω défini par :

$$\Omega^m(h) = \bigcup_{\alpha\in S_h^m} \omega^\alpha_{L,h}$$

Il est alors clair que

$$(3\text{-}18)\qquad \begin{cases} \int_r |Y_h|^P dx \leq M\, h^{-kP} \sum_{\alpha\in S_h^m} \Big| \int \phi(x)\, \chi_{L,h} * \theta^\alpha_h (x)\, dx \Big|^P \leq \\ \leq M\, h^{-kP} \sum_{\alpha\in S_h^m} \int |\phi(x)|^P\, \chi_{L,h} * \theta^\alpha_h (x)\, dx \leq \\ \leq M\, h^{-kP} \int_{\Omega^m(h)} |\phi(x)|^P dx \,. \end{cases}$$

Nous allons majorer maintenant $|\phi(x)|^P$ lorsque $x\in\Omega^m(h)$.

D'après l'hypothèse (3-11), nous savons que :

(3-19) $x - k\,D\,h \notin \Omega$ pour tout $|k| \leq m$ si $x\in\Omega^m(h)$

Soit :

(3-20) $h\,\psi_h$ la fonction caractéristique de $\prod_i (0, D_i h_i)$. Alors, si $\tilde{\phi}$ désigne le prolongement de ϕ par 0 en dehors de Ω ,

$$D^k \psi_{k,h} * \tilde{\phi} = h^{-k} \sum_{\ell\leq k} (-1)^\ell C^\ell_k \tilde{\phi}(x - \ell\, D\, h) \quad ; \quad \psi_{k,h} = \psi_h * .. * \psi_h \ \text{ k-fois.}$$

Donc, sous l'hypothèse (3-11),

$$(3\text{-}21)\qquad \phi(x) = h^k\, D^k\, \psi_h^k * \tilde{\phi} \quad \text{sur} \quad \Omega^m(h)\ .$$

Il en résulte alors que :

$$(3\text{-}22)\qquad \int_{\Omega^m(h)} |\phi(x)|^p\, dx = h^{kp}\, ||\psi_h^k * D^k\, \tilde{\phi}||_p^p \leq N\, h^{kp}\, ||D^k\, \tilde{\phi}||_p^p$$

Puisque $||D^k\, \tilde{\phi}||_p = ||D^k\, \phi||_{L^p(\Omega)}$. on déduit de (3-22) et de (3-18) que :

$$(3\text{-}23)\qquad \int |Y_h^p|\, dx \leq C\, ||D^k\, \phi||_p^p$$

ce qui achève la démonstration de la stabilité des restrictions r_h^{*L} .

La convergence de $p_h^K\, r_h^{*L}\, \phi$ vers ϕ est alors immédiate. Puisque les troncatures $p_h^K\, r_h^{*L}$ sont uniformément bornées, il suffit de vérifier la convergence lorsque ϕ est à support compact K dans Ω . Dans ce cas, pour h assez petit,

$K \cap \Omega^m(h) = \emptyset$ et alors :

$p_h^K\, r_h^{*L}\, \phi = p_h^K\, r_h^{*L}\, \tilde{\phi}$ converge vers $\tilde{\phi}$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$

Lorsque $K = L$, il est évident que les approximations sont auto-adjointes. Dans ce cas, les approximations :

$A_h^K\, (W^{-m,p'}(\Omega)) = (W^{-m,p'}(\Omega)\ ,\ W_h^{-m,p'}(\Omega\ ,\ K)\ ,\ p_h^K\ ,\ r_h^{*K})$ sont également stables et convergentes.

Nous allons maintenant définir des approximations partielles de $W_o^{m,p}(\Omega)$. (cf. chapitre I . §1 , n° 1-4) .

Soit $\vec{K} = (K_q)_{|q|\leq m}$ une famille de multientiers K^q , et $K = \sup_{|q|\leq m} K_q$.

Considérons les espaces $W_o^{q,p}$. Si $K_q \geq q$, les prolongements : $p_h^{K_q}$ sont définis de $W_{o,h}^{m,p}(\Omega\ ;\ K)$ dans $W_o^{q,p}(\Omega)$ pour tout $|q| \leq m$.

THEOREME 3-3.

Supposons que l'ouvert Ω vérifie l'hypothèse (3-11) . Alors les approximations des espaces $W_o^{q,p}(\Omega)$ dans $W_{o,h}^{m,p}(\Omega\ ;\ K)$

$$(3\text{-}24)\qquad A_h^{\vec{K},L}\, (W_o^{q,p}(\Omega)) = (W_o^{q,p}(\Omega)\ \ ;\ \ W_{o,h}^{m,p}(\Omega\ ;\ K)\ ,\ p_h^{K_q}\ ,\ r_h^{*L})$$

sont des approximations partielles de $W_o^{m,p}(\Omega)$ et les approximations $A_h^{K,L}(W_o^{m,p}(\Omega))$

sont plus fines que ces approximations partielles.

En effet, si pour tout $|q| \leq m$, les $p_h^{K_q} u_h$ convergent faiblement vers u_q dans $L^p(\Omega)$, alors $p_h^K u_h = \chi_{K-K_q,h} * p_h^{K_q} u_h$ converge faiblement vers u_q pour tout q , ce qui entraîne que tous les u_α sont égaux à un même élément u . D'autre part, $D^q u = D^q u_q$ appartient à $L^p(\Omega)$ et u est à support compact. Donc u appartient à $W_o^{m,p}(\Omega)$ et les approximations $A_h^{K,L}(W_o^{m,p}(\Omega))$ sont des approximations partielles de $W_o^{m,p}(\Omega)$, qui, d'après le théorème 3-2 , sont convergentes.

D'après le théorème 2-1 du §2, nous savons que :

$$(3\text{-}25) \qquad ||p_h^K u_h||_{m,p} \leq ||u_h||_{h,m,p} \leq m \Big(\sum_{|q|\leq m} |D^q p_h^{K_q} u_h|_P^p \Big)^{\frac{1}{p}}$$

Pour montrer que les approximations $A_h^{K,L}(W_o^{m,p}(\Omega))$ sont plus fines que les approximations partielles, il ne reste plus qu'à vérifier que :

$\lim_{h=0} (p_h^K u_h - p_h^{K_q} u_h) = 0$ dans $W_o^{q,p}(\Omega)$ faible si $||u_h||_{h,m,p} \leq$ Cste. Mais, puisque $W_o^{q,p}(\Omega)$ est dense dans $L^p(\Omega)$, alors $L^{p'}(\Omega)$ est dense dans le dual de $W_o^{q,p}(\Omega)$ et il suffit de vérifier que, pour toute ϕ de $L^{p'}(\Omega)$,

$$(3\text{-}26) \qquad \lim_{h=0} |p_h^K u_h - p_h^{K_q} u_h \ , \ \phi)| = 0$$

Mais cela résulte de l'inégalité :

$$|(p_h^K u_h - p_h^{K_q} u_h \ , \ \phi)| = |(p_h^{K_q} u_h \ , \ \tilde{\phi} - \chi_{K-K_q,h} * \tilde{\phi})| \leq$$

$$\leq ||p_h^{K_q} u_h||_{q,p} \, ||\tilde{\phi} - \chi_{K-K_q,h} * \tilde{\phi}||_{P'}$$

3-3. APPROXIMATIONS DES ESPACES $W^{m,p}(\Omega)$.

L'espace $\mathcal{D}(\Omega)$ n'est pas dense dans $W^{m,p}(\Omega)$. Néanmoins, si l'ouvert Ω est suffisamment régulier, nous allons construire des approximations $W^{m,p}(\Omega)$ à partir des approximations de $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ à l'aide de la proposition 1-7 du n° 1-10 du §1 du chapitre I .

On dira qu'un ouvert Ω a la propriété de m-prolongement s'il existe un opérateur continu π de $W^{m,p}(\Omega)$ dans $W^{m,p}(\mathbb{R}^n)$ tel que, si ρ désigne l'opérateur de restriction à Ω , on ait :

$$\rho \, \pi = 1$$

Pour des exemples d'ouverts Ω ayant la propriété de m-prolongement, on pourra consulter J.L. LIONS [1] , chapitre II , où on trouvera la bibliographie nécessaire.

Considérons des approximations de $W^{m,p}$ définies au n° 2-2 du §2 :

$$A_h^K (W^{m,p}) = (W^{m,p} , W_h^{m,p} , p_h^K , r_h) \quad ; \quad K \geqslant (m)$$

Désignons maintenant par $W_h^{m,p} (\Omega ; K)$ l'espace des suites $u_h = (u_h^\alpha)$ définies sur $R_h^K (\Omega)$ (cf. n° 3-1) muni de la norme $||p_h^K u_h||_{m,p,\Omega}$

Posons :

$$(3\text{-}27) \quad \begin{cases} r_{h,\Omega} (\phi) = r_h (\pi \phi) \\ p_{h,\Omega}^K u_h = \rho (p_h^K u_h) \end{cases}$$

Il est clair qu'une suite u_h définie sur $R_h^K (\Omega)$ peut toujours être considérée comme la restriction à $R_h^K (\Omega)$ d'une suite définie sur Z^n (il suffit de la prolonger par 0 par exemple) et que $p_{h,\Omega}^K u_h$ ne dépend pas du choix de ce prolongement.

On déduit du théorème 2-1 du §2 et de la proposition 1-7 du §1 du chapitre I le

THEOREME 3-4.

Les approximations :

$$A_h^K (W^{m,p} (\Omega)) = (W^{m,p} (\Omega) , W_h^{m,p} (\Omega ; K) , p_{h,\Omega}^K , r_{h,\Omega})$$

sont stables et convergentes. De plus :

$$(3\text{-}28) \quad \begin{cases} D^q p_{h,\Omega}^K u_h = p_{h,\Omega}^{K-q} \nabla_h^q \quad \text{sur } \Omega \\ ||D^q (p_{h,\Omega}^K r_{h,\Omega} \phi - \phi)||_p \leqslant C \omega_p (D^q \pi \phi , h) \end{cases}$$

AUTRES NORMES SUR $W_h^{m,p} (\Omega ; K)$

Soit L un multientier. Nous poserons :

$$(3\text{-}29) \quad |u_h|_{h,p,(L)} = h^{1/p - 1/2} \Big(\sum_{\alpha \in R_h^L(\Omega)} |u_h^\alpha|^p \Big)^{1/p}$$

Nous obtenons alors les inégalités suivantes :

PROPOSITION 3-1.

$$(3\text{-}30)\quad \begin{cases} ||p_h^K u_h||_{m,p,\Omega} \leq \Big(\sum_{|q|\leq m} |\nabla_h^q u_h|^p_{h,p,(K-q)} \Big)^{1/p} \leq \\ \leq c \Big(\sum h^{-pq} \Big)^{1/p} |u_h|_{h,p,(K)} . \end{cases}$$

En effet, on remarque que :

$$||p_h^K u_h||^p_{p,\Omega} = h^{-p/2} \int_r |\sum u_h^\alpha \chi^\alpha_{K,h} * \theta_h^\alpha|^p \, dx \leq$$

$$\leq h^{-p/2} \sum_{\alpha \in \mathcal{K}_h^K(\Omega)} |u_h^\alpha|^p \int_\Omega \chi^\alpha_{K,h} * \theta_h^\alpha \, dx = h^{1-p/2} \sum_{\alpha \in \mathcal{K}_h^K(\Omega)} |u_h^\alpha|^p$$

La proposition en découle en remarquant que $D^q p_h^K = p_h^{K-q} \nabla_h^q = h^{-q} p_h^{K-q} \nabla^q$.

APPROXIMATIONS PARTIELLES DE $W^{m,P}(\Omega)$.

Rappelons que $W^{m,P}(\Omega)$ est l'intersection des espaces $W^{q,P}(\Omega)$ pour $|q| \leq m$, où $W^{q,P}(\Omega)$ est l'espace des fonctions u de $L^P(\Omega)$ dont la dérivée $D^q u$ appartient à $L^P(\Omega)$.

Soit $\vec{K} = (K_q)_{|q|\leq m}$ une famille de multientiers K_q , vérifiant :

$$(3\text{-}31)\quad K_q = K_o + q$$

Les cas les plus intéressants étant ceux où $K_q = q$. Nous allons associer à $\vec{K}$ des approximations partielles de $W^{m,P}(\Omega)$ (cf. chapitre I ; §1 , n° 1-4).

Considérons les réseaux : (cf. n° 3-1)

$$(3\text{-}32)\quad \mathcal{R}_h^{\vec{K}}(\Omega) = \bigcup_{|q|\leq m} \mathcal{R}_h^{K_q}(\Omega) \quad ; \quad \mathcal{R}_h^{\vec{m}}(\Omega) = \bigcup_{|q|\leq m} \mathcal{R}_h^q(\Omega)$$

On désigne maintenant par $W_h^{m,P}(\Omega\ ;\ \vec{K})$ l'espace des suites $u_h = (u_h^\alpha)$ définies sur $\mathcal{R}_h^{\vec{K}}(\Omega)$, et on pose :

$$(3\text{-}33)\quad p_{h,\Omega}^{K_q} u_h = \rho(p_h^{K_q} u_h) \quad ; \quad r_{h,\Omega}(\phi) = r_h(\pi\, \phi)$$

THEOREME 3-5.

Sous l'hypothèse (3-31) , les approximations :

$$A_h^{\vec{K}} (W^{q,P} (\Omega)) = (W^{q,P} (\Omega)) \; W_h^{m,P} (\Omega ; \vec{K}) , p_{h,\Omega}^{K_q} , r_{h,\Omega})$$

sont des approximations partielles de $W_h^{m,P} (\Omega : \vec{K})$ *, stables et convergentes, et :*

$$(3\text{-}34) \quad ||u_h||_{h,p,\vec{K}} = \Big(\sum_{|q|\leq m} |D^q p_{h,\Omega}^{K_q} u_h|_P^P \Big)^{1/P}$$

est une norme sur $W_h^{m,P} (\Omega; \vec{K})$.

Nous allons tout d'abord montrer que $||u_h||_{h,p,\vec{K}}$ est une norme sur $W_h^{m,P}(\Omega ; \vec{K})$. Supposons que $||u_h||_{h,p,\vec{K}} = 0$. Alors :

$$(3\text{-}35) \quad p_h^{K_o} u_h = 0 \text{ sur } \Omega \; ; \; p_h^{K_{q-q}} (\nabla_h^q u_h) = p_h^{K_o} (\nabla_h^q u_h) = 0 \text{ sur } \Omega .$$

Donc, d'après le théorème 3-1 , les $\nabla_h^q u_h$ sont nuls sur $R_h^{K_o} (\Omega)$ pour tout $|q| \leq m$. ce qui entraîne que u_h est nulle sur $R_h^{\vec{K}} (\Omega)$. En effet :

$$(3\text{-}36) \quad R_h^{\vec{K}} (\Omega) = \bigcup_{|q|\leq m} \tau_q R_h^{K_o} (\Omega) = \bigcup_{|k|\leq 1} \tau_k \bigcup_{|q|\leq m-1} \tau_q R_h^{K_o} (\Omega)$$

et il suffit, par récurrence, de montrer le résultat pour $m = 1$. Supposons que α appartient à $\bigcup_{|k|\leq 1} \tau_k R_h^{K_o}(\Omega)$. Si α n'appartient pas à $R_h^{K_o} (\Omega)$, il existe e_i tel que $\alpha - e_i$ appartient à $R_h^{K_o} (\Omega)$. Alors

$$(3\text{-}37) \quad (\nabla_{h_i} u_h)^{\alpha - e_i} = h_i^{-1} (u_h^{\alpha} - u_h^{\alpha - e_i}) = 0 .$$

Donc $u_h^{\alpha} = u_h^{\alpha - e_i} = 0$, ce qui établit la dernière partie du théorème.

Supposons maintenant que $p_h^{K_q} u_h$ converge faiblement vers u_q dans $W^{q,P}(\Omega)$ pour tout q . Montrons alors que

$$(3\text{-}38) \quad D^q u_o = D^q u_q \quad \text{pour tout } q .$$

En effet :

$$(3\text{-}39) \quad \nabla_h^q p_h^{K_o} u_h = D^q \chi_h^q * p_h^{K_o} u_h = D^q p_h^{K_q} u_h$$

Donc, puisque $p_{h,\Omega}^{K_o} u_h$ et $p_h^{K_q} u_h$ convergent dans $\mathcal{D}'(\Omega)$, pour toute ϕ à support compact et pour h assez petit, on aura :

$$(\nabla_h^q p_{h,\Omega}^{K_o} u_h , \phi) = (-1)^{|q|} (p_h^{K_o} u_h , \overline{\nabla}_h^q \phi) = (-1)^{|q|} (p_h^{K_q} u_h , D^q \phi)$$

Donc, lorsque h tend vers 0, nous aurons :

$$(3\text{-}40) \qquad D^q u_q = D^q u_o \in L^P(\Omega) .$$

On en déduit donc que $u_o = u_q$ (pour tout $|q| \leq m$) appartient à $W^{m,P}(\Omega)$, ce qui montre la première partie du théorème.

La convergence des approximations partielles résulte alors du théorème 3-4 .

EXEMPLE 3-1 APPROXIMATIONS DE $W^{m,P}(0 , T)$.

Considérons le cas où $n = 1$ et prenons pour ouvert Ω l'ouvert $(0 , T)$ et $h = T/N$, où N est un entier destiné à tendre vers l'infini. Soit K un entier positif. Alors :

$$(3\text{-}41) \quad \begin{cases} \mathcal{R}_h^K(\Omega) = \{ 1 , 2 , \ldots , N + K \} \\ \mathcal{R}_h^K(\Gamma) = \{ 1 , 2 , \ldots , K \ ; \ N + 1 , \ldots , N + K \} \end{cases}$$

L'espace $W^{m,P}(\Omega ; K)$ est un espace de dimension $N + K$ et

$$(3\text{-}42) \qquad p_{h,\Omega}^K u_h = h^{1/2} \sum_{\alpha=1}^{N+K} \chi_h^\alpha \left(\sum_{q=0}^{K} \left(Q_K^q u_h \right)^\alpha \left(\frac{x}{h} - \alpha + 1 \right)^q \right)$$

Si $K = 1$, il est clair que :

$$(3\text{-}43) \qquad p_h^1 u_h = p_h^0 u_h + h \sum_\alpha (\nabla_h u_h)^\alpha \left(\frac{x}{h} - \alpha + 1 \right) h^{1/2} \chi_h^\alpha$$

On en déduit par recurrence une relation entre les p_h^K :

$$(3\text{-}44) \qquad p_h^K u_h = \sum_{k=1}^{m} \frac{h^{k-1}}{k!} p_h^{K-k} \left(\nabla_h^{k-1} u_h \right) + \frac{h^K}{K!} \sum_\alpha \left(\nabla_h^K u_h \right)^\alpha \left(\frac{x}{h} - \alpha + 1 \right)^K h^{1/2} \chi_h^\alpha$$

Pour définir la restriction $r_{h,\Omega} = r_h \pi$, nous allons prendre pour prolongement π le prolongement de Babitch - Hestenes :

$$(3\text{-}45) \quad \pi \phi(x) = \begin{cases} \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi(-j \times \omega) & \text{si } -\frac{T}{m\omega} \leq x \leq 0 \\ \phi(x) & \text{si } x \in [0 , T] \\ \sum_{j=1}^{m} \lambda_j \phi(j \omega (x - T)) & \text{si } T \leq x \leq T \left(1 + \frac{1}{m\omega} \right) \end{cases}$$

où les λ_j sont solutions du système :

(3-46) $\sum_{j=1}^{m} (-\,j\,\omega)^k \lambda_j = 1$ pour $k = 0 , \ldots , m - 1$.

Si ϕ est la restriction à $(0 , T)$ d'une fonction ϕ définie sur la droite, on pourra prendre alors $\pi\,\phi = \phi$. On remarque que dans ce cas la troncature $p^K_{h,\Omega}\, r_h\, \phi$ d'une fonction ϕ est positive si ϕ est positive, monotone si ϕ est monotone, convexe si ϕ est convexe.

3-4. APPROXIMATIONS DE SOUS-ENSEMBLES CONVEXES DES ESPACES DE SOBOLEV.

EXEMPLE 3-1.

Soit E un sous-ensemble fermé d'un ouvert Ω . *Considérons l'ensemble convexe fermé* K *des fonctions de* $W^{m,P}_o(\Omega)$ *plus grandes que 1 (presque partout) sur* E .

Nous allons construire des approximations et des approximations partielles de cet ensemble K .

Soit L un multientier plus grand que (m) . Considérons l'espace $W^{m,P}_{o,h}(\Omega ; L)$ défini au n° 3-2 et le prolongement p^L_h .

Nous prendrons pour sous-ensemble convexe fermé K_h de $W^{m,P}_{o,h}(\Omega ; L)$ le sous-ensemble K_h des suites u_h telles que

(3-47) $u^\alpha_h \geq h^{+1/2}$ pour tout α de $R^L_h(E)$.

Nous supposerons E *assez régulier pour que toute fonction* ϕ *plus grande que 1 sur* E *soit limite dans* $W^{m,P}_o(\Omega)$ *de fonctions* $\gamma_h\,\phi$ *plus grandes que 1 sur* E_h , *où*

(3-48) $E_h = \{ \bigcup \omega^\alpha_h \quad ; \quad \alpha \in R^L_h(E) \}$

Nous poserons alors :

(3-49) $r_h\,\phi = r^{*1}_h\,(\gamma_h\,\phi)$

THEOREME 3-6.

Les prolongements p^L_h *et les restrictions* r_h *vérifient :*

(3-50) $p^L_h\, K_h \subset K \quad ; \quad r_h\, K \subset K_h$

(3-51) $\lim_{h=0} ||p^L_h\, r_h\, \phi - \phi||_{m,P} = 0$ *pour toute* $\phi \in K$.

Si $\vec{L} = (L_q)_{|q|\leq m}$ *et* $L = \sup_{|q|\leq m} L_q$, *les propriétés suivantes sont vérifiées.*

(3-52) $\left\{ \begin{array}{l} \textit{Si } u_h \in K_h \textit{ et si } p_h^{L_q} u_h \textit{ converge faiblement vers } u_q \textit{ dans } W_o^{q,P}(\Omega) \\ \textit{pour tout } |q| \leq m \textit{ , alors } u_q = u \textit{ appartient à } K \end{array} \right.$

(3-53) $\left\{ \lim_{h=0} ||p_h^{L_q} r_h \phi - \phi||_{q,P} = 0 \quad \textit{pour toute} \quad \phi \in K . \right.$

Le seul point à vérifier est (3-50) , le reste du théorème se déduisant des résultats précédents.

Puisque $h^{1/2} \sum \chi^{\alpha}_{L+(1),h} \geq h^{-1/2}$, on en déduit que :

$$p_h^L u_h|_E = \sum_{\alpha \in R_h^L(\Omega)} u_h^{\alpha} \, h^{1/2} \, \chi^{\alpha}_{L+(1),h}|_E \geq h^{-1/2} \sup u_h^{\alpha} \geq 1$$

d'où il résulte que $p_h^L K_h \subset K$.

Montrons que $r_h K \subset K_h$. Soit ϕ une fonction plus grande que 1 sur E . Alors $\gamma_h \phi$ est plus grande que 1 sur E_h et si $\alpha \in R_h^L(\Omega)$,

$$(r_h \phi)^{\alpha} = h^{+1/2} \int (\gamma_h \phi) \, \chi_h^{\alpha} \, dx \geq h^{1/2} \int \chi_h^{\alpha} \, dx \geq h^{+1/2}$$

EXEMPLE 3-2.

Considérons maintenant *le cône convexe fermé* K *de* $W^{m,P}(\Omega)$ *des fonctions* ϕ *de* $W^{m,P}(\Omega)$ *telles que la restriction de* ϕ *à la frontière* Γ *de* Ω *soit positive(presque partout).*

Nous allons construire des approximations et des approximations partielles de ce cône convexe.

Soit L un multientier plus grand que (m) . Considérons l'espace $W^{m,P}(\Omega , L)$ défini au n° 3-3 et le prolongement $p_{h,\Omega}^L = \rho \, p_h^L$.

Nous prendrons pour cône convexe fermé K_h de $W_h^{m,P}(\Omega , L)$ le sous-ensemble K_h des suites u_h telles que

(3-54) $u_h^{\alpha} \geq 0$ pour tout $\alpha \in R_h^L(\Gamma)$.

Nous supposerons que l'ouvert Ω est suffisamment régulier pour que toute fonction ϕ dont la trace sur Γ soit positive soit limite d'une fonction $\gamma_h \phi$ de $W^{m,P}(R^n)$ positive sur :

$$(3\text{-}55) \qquad \Gamma_h = \{ \bigcup \omega_h^\alpha \quad ; \quad \alpha \in R_h^L(\Gamma) \}$$

Nous poserons alors

$$(3\text{-}56) \qquad r_h \phi = r_h^{*1}(\gamma_h \phi)$$

Si $\vec{L} = (L_q)_{|q| \leq m}$ avec :

$$(3\text{-}57) \qquad L_q = L_o + q \qquad \text{pour } |q| \leq m ,$$

Nous prendrons pour espace V_h l'espace $W_h^{m,P}(\Omega , \vec{L})$ et pour cône K_h l'ensemble des suites u_h positives sur $R_h^{L_o}(\Gamma)$. pour restriction r_h la restriction $r_h^{*1}(\gamma_h \phi)$.

THEOREME 3-7.

Les prolongements $p_{h,\Omega}^L$ et les restrictions r_h vérifient

$$(3\text{-}58) \quad \begin{cases} p_{h,\Omega}^L K_h \subset K \ , \ r_h K \subset K_h \\ \lim\limits_{h=0} ||p_{h,\Omega}^L r_h \phi - \phi||_{m,P,\Omega} = 0 \quad \textit{pour toute } \phi \textit{ dans } K . \end{cases}$$

Si $\vec{L} = (L_q)_{|q| \leq m}$ avec $L_q = L_o + q$, alors

$$(3\text{-}59) \quad \begin{cases} \text{i) } ||u_h||_h = \Big(\sum\limits_{|q| \leq m} |D^q p_{h,\Omega}^{L_q} u_h|_P^P \Big)^{1/P} \textit{ est une norme sur } V_h . \\ \text{ii) } \textit{Si } u_h \in K_h \textit{ et si } p_{h,\Omega}^{L_q} u_h \textit{ converge faiblement vers } u_q \textit{ dans} \\ \quad W^{q,P}(\Omega) \textit{ pour tout } |q| \leq m \textit{ , alors } u_q = u \textit{ appartient à } K . \\ \text{iii) } \lim\limits_{h=0} ||p_h^{L_q} r_h \phi - \phi||_{q,P,\Omega} = 0 \textit{ pour toute } \phi \textit{ dans } K . \\ \text{iv) } r_h K \subset K_h . \end{cases}$$

Si $u_h^\alpha \geqslant 0$ pour tout $\alpha \in R_h^L(\Gamma)$, il est clair que

$$p_{h,\Omega}^L u_h|_\Gamma = \sum_\alpha u_h^\alpha h^{1/2} \chi_{L+(1),h}^\alpha|_\Gamma \geqslant 0$$

donc $p_{h,\Omega}^{L} K_h \subset K$.

De même, si $\phi \in K$, alors $\gamma_h \phi$ est positive sur Γ_h et, si $\alpha \in R_h^L(\Gamma)$

$$(r_h \phi)^\alpha = h^{1/2} \int \gamma_h \phi \chi_h^\alpha \, dx \geq h^{1/2} \int \chi_h^\alpha \, dx \geq 0 .$$

ce qui entraîne que $r_h K \subset K_h$.

Il nous reste à montrer (3-59) ii) et plus précisément que $u \in K$. Mais on sait (théorème 3-5) que $u \in W^{m,p}(\Omega)$ et que $u = \lim_{h=0} p_h^{Lo} u_h$ dans $L^p(\Omega)$. Mais, puisque $p_h^{Lo} u_h$ est positive sur Γ , u est positive sur Γ , donc appartient à K .

§4. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES PROBLEMES AUX LIMITES POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS LINEAIRES OU NON .

Ce paragraphe est consacré aux applications des résultats abstraits des §3 et §4 du chapitre I et à ceux du §3 de ce chapitre.

Au n° 4-1 , nous rappelons quelques résultats sur la formulation variationnelle des problèmes aux limites pour les opérateurs différentiels elliptiques d'ordre $2m$. Au n° 4-2 , en utilisant les approximations du n° 3-3 du §3 , nous énonçons les théorèmes de convergence des solutions approchées de ces problèmes aux limites. Si $m > 1$, nous obtenons des résultats nouveaux, car nous déduisons la coercivité des problèmes approchés de la coercivité du problème initial, sans avoir besoin de l'établir directement. Nous explicitons les coefficients des matrices des opérateurs approchés. Nous retrouvons en particulier les schémas classiques. Au n° 4-3, nous considérons des problèmes non linéaires, et, au n° 4-4 , des applications du §4 du chapitre I . Nous approchons ainsi les solutions de problèmes aux limites unilatéraux et le calcul des capacités. Pour ne pas alourdir l'exposé, nous avons limité le nombre des applications.

4-1. RAPPELS SUR LES PROBLEMES ELLIPTIQUES D'ORDRE $2m$.

Nous rappelons dans ce numéro les résultats concernant les problèmes aux limites elliptiques d'ordre $2m$. (cf. J.L.LIONS [1] , [2]).

Soit Ω un ouvert de R^n . Prenons :

$$(4\text{-}1) \quad \begin{cases} H = L^2(\Omega) \\ V \text{ un sous-espace vectoriel fermé de } H^m(\Omega) \text{ tel que } H_o^m(\Omega) \subset V \subset H^m(\Omega) \end{cases}$$

($H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$)

Considérons la forme sesquilinéaire suivante :

$$(4\text{-}2) \quad a(u , v) = \sum_{|p|,|q|\leq m} \int_\Omega a_{pq}(x) D^p u \overline{D^q v} \, dx \quad ; \quad a_{pq}(x) \in L^\infty(\Omega) .$$

et considérons le triplet $A = \{ V , H , a(u , v) \}$ (cf. Appendice)

Il est clair que V étant un sous-espace fermé de $H^m(\Omega)$, la forme $a(u , v)$ est continue sur $\mathcal{D}(\Omega)$ et définit l'opérateur A suivant à valeurs dans $\mathcal{D}'(\Omega)$:

$$(4\text{-}3) \quad A u = \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^{|q|} D^q (a_{pq}(x) D^p u(x))$$

Le domaine $D(A)$ du triplet $A = \{ V , H , a(u , v) \}$ est le sous-espace des fonctions u de $H^m(\Omega)$ vérifiant :

$$(4\text{-}4) \quad \begin{cases} i) \quad u \in V \quad ; \quad A u \in L^2(\Omega) \\ ii) \quad \int_\Omega (A u) \overline{v} \, dx = a(u , v) \quad \text{pour tout} \quad v \in V . \end{cases}$$

Mais d'après la formule de Green (formelle), la seconde condition implique que :

$$(4\text{-}5) \quad \int_\Omega (A u) \overline{v} \, dx - a(u , v) = \sum_{j=0}^{m-1} < S_j u , \gamma_j \overline{v} > = 0 \quad \text{pour tout} \quad v \in V ,$$

où S_j est un opérateur différentiel sur la frontière Γ de Ω , d'ordre $2m-j-1$, où $\gamma_j u$ est la dérivée normale d'ordre j de u . Ceci a un sens lorsque les crochets désignent la dualité entre les espaces $H^{-m+j+\frac{1}{2}}(\Gamma)$ et $H^{m-j-\frac{1}{2}}(\Gamma)$ convenablement définis.

EXEMPLES.

Si $V = H_o^m(\Omega)$, la condition (4-5) est automatiquement vérifiée puisque $\gamma_j u = 0$ pour $j = 0 , \ldots , m - 1$. Le problème aux limites correspondant est le problème de Dirichlet associé à A .

Si $V = H^m(\Omega)$, la condition (4-5) signifie, qu'en un sens faible, $S_j u = 0$ sur Γ pour $j = 0 , \ldots , m - 1$. Le problème aux limites correspondant est un problème de Neumann attaché à A .

On peut naturellement varier les exemples.

Remarquons aussi que les formes partielles :

$$(4\text{-}6) \quad a_{pq}(u , v) = \int_\Omega a_{pq}(x) D^p u D^q \overline{v} \, dx$$

sont définies et continues sur $H^p(\Omega) \times H^q(\Omega)$ où $H^q(\Omega) = W^{q,2}(\Omega)$.

LE PROBLEME DE LA COERCIVITE.

Ce problème est celui de la recherche des conditions suffisantes sur l'espace V et les coefficients $a_{pq}(x)$ pour que l'une des conditions de coercivité C_1 ou C_2 suivantes soit réalisée.

Condition C_1 .

$$\text{(4-7)} \quad \text{Re } a(v , v) \geq c||v||^2 \qquad \text{pour tout } v \in V \quad ; \quad c > 0$$

Condition C_2 .

$$\text{(4-8)} \quad \text{Re} \sum_{|p|,|q| \leq m} a_{pq}(u_p , u_q) \geq c \sum_{|p| \leq m} |D^p u_p|^2 \quad ; \quad u_p \in H^p(\Omega) .$$

Ce problème a été étudié par différents auteurs (nous renvoyons à J.L. LIONS [1] pour la bibliographie).

Si $m > 1$, nous supposerons ces conditions satisfaites. Si $m = 1$, elles résultent de :

$$\text{(4-9)} \quad \begin{cases} \text{i)} \quad \text{Re} \sum a_{ij}(x) \, \zeta_i \, \bar{\zeta}_j \geq c \, (|\zeta_1|^2 + \ldots + |\zeta_n|^2) \quad \text{p.p dans } \Omega . \\ \text{ii)} \quad \text{Re } a_o(x) \geq c \quad \text{p.p dans } \Omega . \end{cases}$$

où $a_{ij}(x) = a_{e_i e_j}(x)$ et $a_o(x) = a_{o,o}(x)$.

Considérons maintenant la solution du

PROBLEME P .

Etant donné f *dans* $L^2(\Omega)$, *chercher* u *dans* V *vérifiant* :

$$\text{(4-10)} \quad \sum_{|p|,|q| \leq m} \int_\Omega a_{pq}(x) \, D^p u \, D^q \bar{v} \, dx = \int_\Omega f . \bar{v} \, dx \quad \textit{pour tout} \quad v \in V .$$

La solution du problème P est aussi celle du

PROBLEME P' .

Etant donné f *dans* $L^2(\Omega)$, *chercher* u *dans* V *vérifiant* :

$$(4\text{-}11)\quad \begin{cases} \sum_{|p|,|q|\leq m} (-1)^q\ D^q\ (a_{pq}(x)\ D^p u(x) = f(x) \quad \text{dans } L^2(\Omega) \\ \sum_{j=p}^{m-1} < S_j u\ ,\ \gamma_j \overline{v} > = 0 \quad \text{pour tout } v \in V \end{cases}$$

Si les conditions de coercivité sont satisfaites, cette solution existe et est unique.

4-2. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DU PROBLEME DE NEUMANN POUR DES OPERATEURS ELLIPTIQUES D'ORDRE 2 m .

Nous pouvons maintenant déduire du §3 du chapitre I et du §3 du chapitre II des théorèmes d'approximation de la solution u du problème P .

Considérons, pour fixer les idées, le cas du problème de Neumann, c'est-à-dire le cas où $V = H^m(\Omega)$.

THEOREME 4-1.

Supposons tout d'abord que la condition de coercivité C_1 soit satisfaite. Si $L \geq (m)$. les solutions u_h de l'équation :

$$(4\text{-}12)\quad \sum_{|p|,|q|\leq m} \int_\Omega a_{pq}(x)\ D^p\ p_h^L\ u_h\ D^q\ p_h^L\ \overline{v}_h\ dx = \int_\Omega f(x)\ p_h^L\ \overline{v}_h\ dx$$

où v_h parcourt l'espace $W_h^{m,2}(\Omega ; L)$, convergent vers la solution u du problème P dans $W^{m,p}(\Omega)$.

Si la solution u appartient à $H^\ell(\Omega)$ $(\ell \geq m)$. si $L \geq \ell$ et si :

$$(4\text{-}13)\quad \gamma_\ell^m(h) = \sup_u ||u||_\ell^{-1}\ ||u - p_{h,\Omega}^L\ r_h\ u||_m$$

alors

$$(4\text{-}13)\quad ||u - p_{h,\Omega}^L\ u_h||_m \leq M\ \gamma_\ell^m(h)$$

Supposons que la condition de coercivité C_2 soit satisfaite. Si $L_q = L_o + q$, les solutions u_h de l'équation :

$$(4\text{-}14)\quad \sum_{|p|,|q|\leq m} \int_\Omega a_{pq}(x)\ D^p\ p_h^{L_p}\ u_{h_o}\ \overline{D^q\ p_h^{L_q}\ v_h}\ dx = \int_\Omega f(x)\ \overline{p_h^{L_o}\ v_h}\ dx$$

où v_h parcourt l'espace $W_h^{m,2}(\Omega ; \vec{L})$, convergent vers la solution u au sens suivant :

$$(4\text{-}15)\qquad \lim_{h=0} \sum_{|p|\leq m} |D^p\, p_{h,\Omega}^{L_p}\, u_h - u|^2 = 0$$

REMARQUE 4-1.

Nous montrerons dans un prochain travail qu'il existe une restriction r_h telle que :

$$(4\text{-}16)\qquad \gamma_\ell^m(h) \leq c\, h^{\ell-m}$$

ce qui montre que l'erreur décroit en fonction du choix de L . (cf. AUBIN [3]).

Lorsque $D(A)$ est contenu dans $H^{2m}(\Omega)$, $\gamma_\infty(h)$ est de l'ordre de h^m et la norme dans $H = L^2(\Omega)$ l'erreur $u - p_h u_h$ est majorée par :

$$(4\text{-}17)\qquad |u - p_h u_h| \leq c\, h^\ell .$$

(cf. §3 , n° 3-3 du chapitre I).

Lorsque la condition C_2 est satisfaite, en prenant $K_o = 0$, nous obtenons le problème approché suivant :

$$(4\text{-}18)\qquad \sum_{|p|,|q|\leq m} \int_\Omega a_{pq}(x)\; p_h^o\; \nabla_h^p\; u_h\; p_h^o\; \nabla_h^q\; \bar{v}_h\, dx = \int_\Omega f(x)\; p_h^o\; \bar{v}_h\, dx$$

qui a été étudié par J. CEA [1] .

Le théorème résulte du théorème 3-3 du n° 3-3 du §3 , chapitre I , du théorème 3-4 du n° 3-4 du §3 , chapitre I , des théorèmes 3-4 et 3-5 du n° 3-3 du §3 , chapitre II .

Les problèmes approchés sont de la forme :

$$(4\text{-}19)\qquad A_h\, u_h = \sum_{|p|,|q|\leq m} A_{p,q,h}^{L_p,L_q}\; u_h = f_h$$

où la matrice $A_{p,q,h}^{L_p,L_q}$ est associée à la forme sesquilinéaire :

$$(4\text{-}20)\qquad \int_\Omega a_{pq}(x)\; D^p\; p_h^{L_p}\; u_h\; D^q\; p_h^{L_q}\; \bar{v}_h\; dx .$$

Nous allons maintenant calculer les coefficients $a_{p,q,h}^{L_p,L_q}(\alpha\ ,\ \beta)$ de la matrice $A_{p,q,h}^{L_p,L_q}$ (où $\alpha\ ,\ \beta \in \vec{R}_h^L(\Omega)$)

Rappelons que : (§2 , n° 2-1)

$$(4\text{-}21)\qquad a_{L_p}(k\ ,\ \ell) = \begin{cases} \dfrac{1}{(L_p - \ell)!} \displaystyle\sum_{r\leq k} (-1)^{|r|}\, C_{L_p+(1)}^r\, (k-r)^{L_p-\ell} & \text{si } 0 \leq k \leq L_p \\ 0 \text{ dans le cas contraire.} \end{cases}$$

Posons :

$$(4\text{-}22)\quad \left\{ \begin{array}{l} \Omega^{\alpha,p}\ (a_{pq}\ ;\ \gamma\ ,\ k\ ,\ \ell) = a_{L_p}\ (L_p + \gamma - \alpha\ ,\ k + p)\ a_{L_q}\ (L_q + \gamma - \beta\ ,\ \ell + q). \\ \quad \cdot \int_{\Omega \cap \omega_h^\gamma} a_{pq}(x)\ \frac{1}{k!\ \ell!}\ \left(\frac{x}{h} - \gamma + 1\right)^{k+\ell}\ dx \end{array} \right.$$

THEOREME 4-2.

Le terme général $a_{p,q,h}^{L_p,L_q}(\alpha\ ,\ \beta)$ *de la matrice* $A_{p,q,h}^{L_p,L_q}$ *est égal à :*

$$(4\text{-}23)\quad a_{p,q,h}^{\alpha,\beta} = \sum_{\gamma \in R_h(\Omega)}\ \sum_{\substack{k \leqslant L_p - p \\ \ell \leqslant L_q - q}} h^{-p}\ h^{-q}\ \Omega^{\alpha,\beta}\ (a_{pq}\ ,\ \gamma\ ,\ k\ ,\ \ell)$$

lorsque $\alpha\ ,\ \beta$ *appartiennent à* $\vec{R}_h^L(\Omega)$.

En effet, il est clair que quand $\alpha\ ,\ \beta \in R_h^L(\Omega)$, le terme général de la matrice est égal à :

$$a_{p,q,h}^{L_p,L_q}(\alpha\ ,\beta) = \int_\Omega a_{pq}\ (x)\ D^p\ \chi_{L_p+(1),h}^{\alpha}\ D^q\ \chi_{L_q+(1),h}^{\beta}\ dx\ .$$

Nous explicitons cette expression. Puisque (§2 , n° 2-1)

$$\chi_{L_p+(1)} = \sum_{r \leqslant L_p}\ \psi_{L_p}^{r}\ (x + L_p - r)\ \chi^{-L_p+r}\ (x)$$

On en déduit, en posant $\gamma = -L_p + r + \alpha = -L_q + s + \beta$, que

$$a_{p,q,h}^{L_p,L_q}(\alpha\ ,\ \beta) = \sum_{\gamma} \int_\Omega a_{pq}(x)\ D^p\ \psi_{L_p}^{L_p+\gamma-\alpha}\ \left(\frac{x}{h} - \gamma\right)\ D^q\ \psi_{L_q}^{L_q+\gamma-\beta}\ \left(\frac{x}{h} - \gamma\right)\ dx$$

Puisque (§2 , n° 2-1) :

$$D^p\ \psi_{L_p}\ \left(\frac{x}{h} - \gamma\right) = h^{-p} \sum_{k \leqslant L_p - p}\ a_{L_p}\ (r\ ,\ k + p)\ \frac{1}{k\ !}\ \left(\frac{x}{h} - \gamma + 1\right)^k$$

Il résulte de ces inégalités l'identité (4-23) .

CONSEQUENCES.

D'après (4-21) , les indices γ de (4 - 23) vérifient en fait $\alpha - L_p \leqslant \gamma \leqslant \alpha$; $\beta - L_q \leqslant \gamma \leqslant \beta$.

Si l'on pose $\beta = \alpha - \delta$, les coefficients $a_{p,q,h}^{L_p,L_q}(\alpha\ ,\ \alpha - \delta)$ sont nuls si pour un indice i au moins, on a :

$$\delta_i > L_{pi} \quad \text{ou} \quad \delta_i < -L_{qi}$$

Il en résulte que le nombre maximum de diagonales non nulles de la matrice $A^{L_p,L_q}_{p,q,h}$ *est égal à* $\prod_{i=1}^{n} (L_{p_i} + L_{q_i} + 1)$

Les conditions aux limites interviennent dans les expressions des coefficients $a^{L_p,L_q}_{p,q,h}(\alpha , \beta)$ lorsque l'un des deux indices α ou β appartient au réseau $R^{\vec{K}}_h(\Gamma)$. En effet, dans ce cas, l'un des pavés $\alpha - L_p \leq \gamma \leq \alpha$ ou $\beta - L_q \leq \gamma \leq \beta$ n'est pas contenu dans $R_h(\Omega)$.

Puisque le problème de la coercivité de l'opérateur A est supposé résolu, la matrice $A_h = \sum A^{L_p,L_q}_{p,q,h}$ est définie positive. Si l'opérateur A est hermitien, la matrice A_h est hermitienne. Si $q \neq 0$, alors $\sum_{\beta} a^{L_p,L_q}_{p,q,h}(\alpha , \beta) = 0$.

En effet :

$$\sum_{\beta} a^{L_p,L_q}_{p,q,h}(\alpha , \beta) = \int_{\Omega} a_{pq}(x) \; D^p \; \chi^{\alpha}_{L_p+(1),h} \; D^q \sum_{\beta} \chi^{\beta}_{L_q+(1),h} \; dx = 0$$

REMARQUE 4-2.

Considérons le cas particulier où $m = 1$ et où

$$a_h(u_h , v_h) = a(p^1_h u_h , p^1_h v_h) \quad (L = (1))$$

Supposons que f appartienne à $L^2(\Omega)$. D'après le théorème 4-1 , on en déduit que

$$||u - p^1_{h,\Omega} u_h||_1 \leq c\, h$$

puisque $||u - p^1_{h,\Omega} r_h u||_1 \leq c\, h ||u||_2$

En prenant le même schéma approché, Y. DEMIANOVITCH [1] a démontré, par d'autres méthodes, que :

$$||u - p^1_{h,\Omega} u_h||_1 \leq c\sqrt{h} .$$

4-3. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES PROBLEMES AUX LIMITES POUR DES OPERATEURS DIFFERENTIELS NON LINEAIRES.

EXEMPLE 4-1.

Soit Ω un ouvert borné de R^n . Prenons pour espace V l'espace de Banach $W^{m,p}_o(\Omega)$ et pour forme $a(u ; v)$ la forme :

$$(4\text{-}24)\qquad a(u\ ;\ v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i\ u|^{\rho}\ D_i\ u\ .\ D_i\ v\ .\ dx \quad :\quad \rho > 0\ .$$

Cette forme est définie sur $V \times V$ si

$$P = \rho + 2\ .\ \text{Alors}\quad P' = \frac{\rho + 2}{\rho + 1} = \frac{P}{\rho + 1}\quad ;\quad \frac{1}{P} + \frac{1}{P'} = 1$$

Il est clair que dans ce cas, les hypothèses de la proposition 3-4 du n° 3-5 . §3 , chapitre I sont satisfaites. L'opérateur non linéaire A de $W_o^{1,P}(\Omega)$ dans $W^{1,P'}(\Omega)$ défini par :

$$(4\text{-}25)\qquad A(u) = -\sum_{i=1}^{n} D_i\ (\ |D_i\ u|^{\rho}\ D_i\ u)$$

est borné, coercif, monotone et continu des droites de V dans V' faible, donc surjectif.

On déduit de la proposition 3-4 du §3 du chapitre I et des résultats du n° 3-2 du §3 du chapitre II la :

PROPOSITION 4-1.

Si $L \geq (1)$, *les solutions* u_h *du problème non linéaire :*

$$(4\text{-}26)\qquad \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i\ p_h^L\ u_h|^{\rho}\ D_i\ p_h^L\ u_h\ .\ D_i\ p_h^L\ v_h\ dx = (f\ ,\ p_h^L\ v_h)$$

pour tout v_h *de* $W_{o,h}^{m,P}(\Omega\ ;\ L)$, *où* f *appartient à* $L^{P'}(\Omega)$, *convergent faiblement vers une solution* u *de l'équation* $A(u) = f$. *Si* $L_o = 0$, $L_i \geq e_i$ ($i = 1\ ,\ \ldots\ ,\ n$) *et* $\vec{L} = (\ L_o\ ,\ L_1\ ,\ldots,\ L_n\ )$, *les solutions* u_h *de l'équation variationnelle :*

$$(4\text{-}27)\qquad \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} |D_i\ p_h^{L_i}\ u_h|^{\rho}\ D_i\ p_h^{L_i}\ u_h\ D_i\ p_h^{L_i}\ v_h\ dx = (\ f\ ,\ p_h^{L_o}\ v_h\ )$$

pour tout v_h *de* $W_{o,h}^{m,P}(\Omega\ ,\ \vec{L})$ *convergent vers une solution* u *de l'équation* $A(u) = f$ *au sens suivant :*

$$\begin{cases} D_i\ p_h^{L_i}\ u_h \text{ converge vers } D_i\ u \text{ dans } L^P(\Omega) \text{ faible.} \\ p_h^{L_o}\ u_h \text{ converge vers } u \text{ dans } L^P(\Omega) \text{ faible.} \end{cases}$$

En particulier, si $L_o = 0$ et $L_i = e_i$, l'équation (4-27) s'écrit :

$$\sum_{\alpha \in R_h^{(1)}(\Omega;\Gamma)} |\nabla_{hi}\ u_h^{\alpha}|^{\rho}\ \nabla_{hi}\ u_h^{\alpha}\ .\ \nabla_{hi}\ v_h^{\alpha} = h^{1/2} \sum_{\alpha \in R_h^{(1)}(\Omega;\Gamma)} \left(\int f\ \chi_h^{\alpha}\ dx\ \right) v_h^{\alpha}$$

EXEMPLE 4-2.

Soit toujours Ω un ouvert borné de R^n, de frontière Γ suffisamment régulière.

On prend pour espace V le sous-espace fermé des fonctions v de $H^1(\Omega)$ dont la trace $\gamma_o v$ appartient à $L^p(\Gamma)$. On prend pour forme $a(u ; v)$ la forme

$$(4\text{-}28)\quad a(u ; v) = \int_\Omega u \cdot v \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i u \cdot D_i v \, dx + \int_\Gamma |u|^{p-2} u \cdot v \, d\sigma$$

où $d\sigma$ est une mesure superficielle sur Γ.

L'espace V est un espace de Banach pour la norme :

$$||v|| = ||v||_{H^1(\Omega)} + |\gamma_o v|_{L^p(\Gamma)}$$

Les hypothèses de la proposition 3-4 du n° 3-5 du §3 du chapitre I sont satisfaites.

Soit $f \in L^2(\Omega)$, $g \in L^{p'}(\Gamma)$. Le couple $\{ f , g \}$ définit une forme linéaire sur V.

On considère le :

PROBLEME P :

Chercher u *dans* V *tel que* $a(u ; v) = \int_\Omega f v \, dx + \int_\Gamma g v \, dx$

Une solution u du problème P vérifie :

$$(4\text{-}29)\quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{dans } L^{p'}(\Omega) \\ |u|^{p-2} u \cdot|_\Gamma = g & \text{sur } \Gamma \end{cases}$$

On déduit de la proposition 3-4 du chapitre I et des résultats du n° 3-3 du §3 du chapitre II la :

PROPOSITION 4-2.

Si $L \geq 1$, *les solutions* u_h *de l'équation variationnelle*

$$(4\text{-}30)\quad \begin{cases} \int_\Omega p_h^L u_h \; p_h^L v_h \, dx + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i \; p_h^L u_h \; D_i \; p_h^L v_h \, dx + \\ \int_\Gamma |p_h^L u_h|^{p-2} \; p_h^L u_h \; p_h^L v_h \, d\sigma = \int_\Omega f \; p_h^L v_h \, dx + \int_\Gamma g \; p_h^L v_h \, d\sigma \end{cases}$$

pour tout v_h *de* $W_h^{m,P}(\Omega , L)$, *convergent faiblement vers une solution* u *du problème* P .

Si $L_i = L_o + e_i$ ($1 = i , \ldots . n$) *les solutions* u_h *de l'équation variationnelle :*

$$(4\text{-}31)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega D_i\, p_h^{L_i} u_h \; D_i\, p_h^{L_i} v_h \, dx + \int_\Omega p_h^{L_o} u_h \; p_h^{L_o} v_h \, dx + \\ \int_\Gamma |p_h^{L_o} u_h|^{P-2} \cdot p_h^{L_o} u_h \cdot p_h^{L_o} v_h \, d\sigma = \int_\Omega f\, p_h^{L_o} v_h \, dx + \int_\Gamma f\, p_h^{L_o} v_h \, d\sigma \end{array} \right.$$

pour tout v_h *de* $\vec{R_h^L}(\Omega)$, *convergent vers une solution* u *du problème* P *au sens suivant :*

$$\left\{ \begin{array}{l} p_h^{L_o} u_h \text{ converge vers } u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible ;} \\ \gamma_o\, p_h^{L_o} u_h \text{ converge vers } \gamma_o u \text{ dans } L^P(\Gamma) \text{ faible ;} \\ D_i\, p_h^{L_i} u_h \text{ converge vers } D_i u \text{ dans } L^2(\Omega) \text{ faible.} \end{array} \right.$$

Si l'on prend $L_o = 0$, si e_h^α est la suite qui vaut 1 au point α et 0 ailleurs, l'équation 4-31 revient à résoudre le système (4-32) , (4-33) :

$$(4\text{-}32)\quad \sum_{i=1}^{n} \nabla_{h_i} u_h^\alpha \; \nabla_{h_i} e_h^\alpha + u_h^\alpha e_h^\alpha = h^{1/2} \left(\int f \chi_h^\alpha \, dx \right) e_h^\alpha \quad ; \quad \alpha \in \vec{R_h^1}(\Omega , \Gamma)$$

$$(4\text{-}33)\quad \left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{h} \nabla_h^i u_h^\alpha \cdot \Omega_h^\alpha \cdot \nabla_{h_i} e_h^\alpha + \Omega_h^\alpha u_h^\alpha e_h^\alpha + \Gamma_h^\alpha |u_h^\alpha|^{P-2} u_h^\alpha e_h^\alpha = \\ = h^{1/2} \left(\int_\Omega f \chi_h^\alpha \, dx + \int_\Gamma g \chi_h^\alpha \, d\sigma \right) e_h^\alpha \quad ; \quad \alpha \in \vec{R_h^1}(\Gamma) \end{array} \right.$$

où $\Omega_h^\alpha = h^{-1}$ mes ($\Omega \cap \omega_h^\alpha$) et $\Gamma_h^\alpha = h^{-1}$ mes ($\Gamma \cap \omega_h^\alpha$)

Remarquons enfin que si $v \in H^1(\Omega)$, alors $\gamma_o v \in H^{1/2}(\Gamma)$.

Si $P \leqslant \dfrac{2n}{n-1}$. $H^1(\Gamma)$ est contenu dans $L^P(\Gamma)$ d'après le théorème de Sobolev fractionnaire et l'espace V est égal à $H^1(\Omega)$.

EXEMPLE 4-3.

Donnons n fonctions $a_i(x , u)$ définies sur $\Omega \times R$ vérifiant, si $P \geqslant 2$

$$(4\text{-}34)\quad \begin{cases} \text{i)} & |a_i(x, u)| \leq M\,|u|^{p-1} \quad : \text{ pour presque tout } x \text{ de } \Omega \\ \text{ii)} & a_i(x, u)\,u \geq c\,|u|^p \\ \text{iii)} & a_i(x, u) - a_i(x, v) \geq c\,|u - v|^{p-2}(u - v) \end{cases}$$

Considérons alors la forme $a(u : v)$ suivante sur $W_o^{1,p}(\ )$:

$$(4\text{-}35)\quad a(u : v) = \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x : D_i u)\, D_i v\, dx = \sum_{i=1}^{n} a_i(u, v)$$

Grâce à l'inégalité de Poincaré, les hypothèses suivantes sont satisfaites :

$$(4\text{-}36)\quad \begin{cases} \text{i)} & A(u) \text{ est borné et continu des droites de } V \text{ dans } V' \text{ faible} \\ \text{ii)} & a_i(u_i : v_i) \geq c\,||u||_{i,p}^p \\ \text{iii)} & \sum_{i=1}^{n} \sigma_i(u_i, v_i) \geq c \sum_{i=1}^{n} ||u_i - v_i||_{i,p}^p \end{cases}$$

où $||u_i||_{i,p} = |D_i u_i|_p$

Si $f \in L^{p'}(\Omega)$, on déduit des résultats du §3 du chapitre I qu'il existe une solution unique u de $W_o^{1,p}(\Omega)$ telle que

$$(4\text{-}37)\quad \begin{cases} A(u) = -\sum_{i=1}^{n} D_i\, a_i(x, D_i u) = f \text{ dans } L^{p'}(\Omega) \\ u|_\Gamma = 0\,. \end{cases}$$

On en déduit alors la :

PROPOSITION 4-3.

Si $L \geq 1$, *les solutions* u_h *des équations variationnelles :*

$$(4\text{-}38)\quad \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x : p_h^L u_h)\, p_h^L v_h\, dx = \int_\Omega f\, p_h^L v_h\, dx$$

pour tout v_h *de* $W_{o,h}^{1,p}(\Omega : L)$ *convergent fortement vers la solution* u *de (4-37) et :*

$$(4\text{-}39)\quad ||u - p_h^L u_h||_{1,p} \leq K||u - p_h r_h u||_{1,p}^{1/p}$$

Si $\vec{L} = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$ *avec* $L_i \geq e_i$, *les solutions* u_h *de :*

$$(4\text{-}40)\qquad \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_i \left(x : p_h^{Li} u_h \right) p_h^{Li} v_h \, dx = \int_{\Omega} f \, p_h^{Lo} v_h \, dx$$

convergent vers u *au sens suivant :*

$$(4\text{-}41)\qquad \lim_{h=0} |D_i \, p_h^{Li} u_h - u|_{L^p(\Omega)} = 0 \quad : \quad \lim_{h=0} |p_h^{Lo} u_h - u|_{L^p(\Omega)} = 0$$

4-4. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DE PROBLEMES AUX LIMITES UNILATERAUX - CALCUL D'UNE CAPACITE.

Nous donnons maintenant des exemples d'approximations de solutions d'inéquations variationnelles, étudiées au §4 du chapitre I .

EXEMPLE 4-4. *Problèmes aux limites unilatéraux.*

Prenons pour espace V l'espace $H^1(\Omega)$, pour cône convexe K l'ensemble des fonctions v de V de trace positive et pour forme $a(u, v)$ la forme :

$$(4\text{-}42)\qquad a(u, v) = \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij}(x) \, D_i u \cdot D_i v \, dx + \int_{\Omega} a_o(x) \, u \cdot v \, dx$$

où $a_{ij}(x) \in L^{\infty}(\Omega)$, $a_o(x) \in L^{\infty}(\Omega)$ vérifient :

$$(4\text{-}43)\qquad \sum_{j,i=1}^{n} a_{ij}(x) \, \zeta_i \, \zeta_j \geq c \, |\zeta|^2 \quad : \quad a_o(x) \geq c \quad \text{p.p sur } \Omega .$$

Considérons la solution u du *Problème* P : *Chercher* u *dans* K *telle que*

$a(u, u - v) \leq (f, u - v)$ pour tout $v \in K$: $f \in L^2(\Omega)$

Elle vérifie :

$$(4\text{-}44)\qquad \begin{cases} \text{i)} & -\sum_{i,j=1}^{n} D_j \left(a_{ij}(x) \, D_i u \right) + a_o(x) \, u = f \ \text{ dans } L^2(\Omega) \\ \text{ii)} & u|_{\Gamma} \geq 0 \quad : \quad \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}|_{\Gamma} \geq 0 \\ \text{iii)} & u \, \dfrac{\partial u}{\partial \nu_A}|_{\Gamma} = 0 . \end{cases}$$

On déduit du corollaire 4-2 du §4 du chapitre I et du théorème 3-7 du n° 3-4 du §3 du chapitre II le :

THEOREME 4-3.

Si $L \geq (1)$, *les solutions* u_h *de l'inéquation variationnelle :*

$$(4\text{-}45)\quad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i\, p_h^L\, u_h\, (D_j\, p_h^L(u_h - v_h))dx + \int_\Omega a_o(x)\, p_h^L\, u_h\, p_h^L(u_h - v_h)\, dx \\ \qquad \leq \int_\Omega f(x)\, p_h^L\, (u_h - v_h)\, dx \quad \textit{pour tout} \quad v_h \in K_h\ . \end{cases}$$

convergent vers u *dans* $H^1(\Omega)$ *fort, et :*

$$(4\text{-}46)\quad ||u - p_h^L\, u_h|| \leq M\, ||u - p_h^L\, r_h\, u||^{1/2}$$

Si $L_i = L_o + e_i$, $\vec{L} = (L_i)_{0\leq i\leq n}$, *les solutions* u_h *de l'inéquation variationnelle :*

$$(4\text{-}47)\quad \begin{cases} \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i\, p_h^{Li}\, u_h (D_j\, p_h^{Lj}(u_h - v_h)) + \int_\Omega a_o(x)\, p_h^{Lo}\, u_h\, p_h^{Lo}(u_h - v_h)\, dx \\ \qquad \leq \int_\Omega f(x)\, p_h^{Lo}\, (u_h - v_h)\, dx \quad \textit{pour tout} \quad v_h \in K_h\ . \end{cases}$$

convergent vers u *au sens suivant :*

$$(4\text{-}48)\quad \lim_{h=0} |D_i\, u - D_i\, p_h^{Li}\, u_h| = 0 \ ; \ \lim_{h=0} |u - p_h^{Lo}\, u_h| = 0\ .$$

EXEMPLE 4-4. *Calcul d'une capacité.*

Prenons pour espace V l'espace $H_o^1(\Omega)$, pour convexe fermé K l'ensemble des fonction u plus grandes que 1 sur E . (cf. Exemple 3-1 du n° 3-4 du §3 du chapitre II) , pour forme $a(u ; v)$ la forme

$$(4\text{-}49)\quad a(u ; v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x)\, D_i\, u\, D_j\, v\, dx$$

où les coefficients $a_{ij}(x)$ vérifient (4-43) .

Considérons la solution du PROBLEME P : *Chercher* u *dans* K *telle que :*

$$(4\text{-}50)\quad a(u ; u - v) \leq 0 \quad \text{pour tout } v \text{ de } K\ .$$

La solution u *du problème* P *est égale à 1 sur* E *et la distribution* $v \to a(u, v)$ *est une mesure positive portée par la frontière de* E , *appelée mesure capacitaire de* E *par rapport à la forme* $a(u, v)$.

PROPOSITION 4-4.

Si $\vec{L} = (L_i)_{0 \leq i \leq n}$, *avec* $L_i \geq e_i$, *les solutions* u_h *de l'inéquation variationnelle :*

$$(4\text{-}51) \qquad \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} a_{ij} \; D_i \; p_h^{L_i} \; u_h \; D_j \; p_h^{L_j} \; (u_h - v_h) \; dx \leq 0$$

pour tout v_h *de* K_h , *convergent vers* u *au sens suivant :*

$$\lim_{h=0} \; |D_i \; p_h^{L_i} \; u_h - D_i \; u| = 0 \; ; \quad \lim_{h=0} \; |p_h^{L_o} \; u_h - u| = 0 \; .$$

Si $L_i = L \geq (1)$, *alors*

$$(4\text{-}52) \qquad ||u - p_h^L \; u_h|| \leq M \; ||u - p_h^L \; r_h \; u||^{1/2}$$

§5. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS DIFFERENTIELLES-OPERATIONNELLES (II).

Nous poursuivons l'étude du §5 du chapitre I , en étudiant au n° 5-1 , la convergence forte des solutions du "schéma implicite" et de leurs dérivées par rapport à t . Nous appliquons ce résultat au n° 5-2 à l'étude des solutions du problème de Cauchy-Dirichlet pour les équations paraboliques. En utilisant l'approximation des solutions du Lemme des Projections (n° 3-6 , §3 , chapitre I) , nous construisons au n° 5-3 des schémas d'approximation implicites à 2 L + 1 niveaux, dont certaines solutions convergent fortement.

5-1. CONVERGENCE FORTE DES SOLUTIONS DU SCHEMA EXPLICITE.

Faisons les hypothèses du théorème 5-1 du §5 du chapitre I . Nous avions alors approché la solution u du

PROBLEME P .

Chercher u *dans* W *tel que :*

$$(5\text{-}1) \qquad \begin{cases} \text{i)} \quad \dfrac{du}{dt} + A(t) \; u = f(t) \quad \textit{dans} \quad L^2 (0 , T ; V') = V' \; . \\ \text{ii)} \quad u(0) = u_o \quad \textit{dans} \quad H \; . \end{cases}$$

par les solutions u_h du :

PROBLEME P_h .

Chercher u_h *dans* W_h *tel que :*

$$(5\text{-}2)\quad \begin{cases} \text{i)} \quad \dfrac{du_h}{dt} + A_h(t)\, u_h = f_h(t) \quad \textit{dans} \quad L^2(0, T ; v'_h) = V'_h . \\ \text{ii)} \quad u_h(o) = u_{oh} \quad \textit{dans} \quad V_h . \end{cases}$$

Nous allons approcher les solutions u_h des équations différentielles par des solutions $u_{h,k}$ d'équations algébriques et montrer la convergence forte des solutions $u_{h,k}$ vers la solution u du problème P dans l'espace W des fonctions u de $L^2(0, T ; V)$ dont la dérivée u' appartient à $L^2(0, T ; V')$.

On se donne pour cela des approximations autoadjointes stables et convergentes $A_k(V_h)$ de l'espace $V_h = L^2(0, T ; V_h)$:

$$(5\text{-}3)\quad A_k(V_h) = (V_h , V_\zeta , p_k , r_k^*) \quad ; \quad k \in]0, 1[\quad ; \quad \zeta = (h, k)$$

où :

$$(5\text{-}4)\quad R_k(0, T) = \{ \mu \in N \text{ tels que } 1 \leqslant \mu \leqslant T k^{-1} + 1 \}$$

$$(5\text{-}5)\quad \begin{cases} V_\zeta = \ell^2(R_k(0, T) ; V_h) \text{ est l'espace des suites } u_\zeta = (u_\zeta^\mu) \text{ définies sur } R_k(0, T) \text{ à valeurs dans } V_h . \end{cases}$$

$$(5\text{-}6)\quad p_k u_\zeta = \sqrt{k} \sum_\mu u_\zeta^\mu \chi_k^\mu(t) \quad ; \quad r_k^* u_h = \left(\sqrt{k} \int_0^T u_h(t)\, \chi_k^\mu(t)\, dt \right)_\mu$$

où $\chi_k^\mu(t)$ est égale à $\frac{1}{k} \chi\left(\frac{t}{k} - \mu\right)$, χ étant la fonction caractéristique de l'intervalle $(-1, 0)$.

On associe aux approximations $A_k(V_h)$ et $A_h(V)$ les approximations autoadjointes de $V = L^2(0, T ; V)$ dans V_ζ :

$$(5\text{-}7)\quad \begin{cases} \text{i)} \quad A_\zeta(V) = (V , V_\zeta , p_\zeta = p_k p_h , r_\zeta^* = r_k^* r_h^*) \\ \text{ii)} \quad A_\zeta(V') = (V' , V'_\zeta , p_\zeta = p_k p_h \quad ; \quad r_\zeta^* = r_k^* r_h^*) \end{cases}$$

où le produit scalaire sur V_ζ est défini par :

$$(5\text{-}8)\quad (u_\zeta , v_\zeta)_\zeta = \int_0^T (p_k u_\zeta , p_k v_\zeta)_h \, dt = \sum_\mu (u_\zeta^\mu , v_\zeta^\mu)_h$$

On introduit maintenant les opérateurs A_ζ définis par :

$$(5\text{-}9)\quad \left\{ \begin{array}{l} a_\zeta (u_\zeta , v_\zeta) = \int_0^T a_h (t ; p_k u_\zeta , p_k v_\zeta) \, dt = \\ = \sum_\mu \int_0^T a_h (t : u_\zeta^\mu , v_\zeta^\mu) \chi_k^\mu \, dt = \sum_\mu (A_\zeta^\mu u_\zeta^\mu , v_\zeta^\mu)_h . \end{array} \right.$$

et $f_\zeta = r_k^* f_h$:

$$(5\text{-}10)\quad (f_\zeta , v_\zeta)_\zeta = \int_0^T (f_h (t) , p_k v_\zeta) \, dt :$$

Nous approchons alors les solutions u_h du problème P_h par les solutions u_ζ du :

PROBLEME P_ζ .

Chercher la suite $u_\zeta = (u_\zeta^\mu)$ *définie sur* $R_k (0 , T)$ *à valeurs dans* V_h *vérifiant :*

$$(5\text{-}11)\quad \left\{ \begin{array}{ll} \text{i)} & (\nabla_k u_\zeta , v_\zeta)_\zeta + a_\zeta (u_\zeta , v_\zeta) = (f_\zeta , v_\zeta)_\zeta \quad \textit{pour tout} \quad v_\zeta \in V_\zeta \\ \text{ii)} & u_\zeta^1 = u_{oh} \end{array} \right.$$

où $(\nabla_k u_\zeta)^\mu = k^{-1} (u_\zeta^{\mu+1} - u_\zeta^\mu)$

La suite u_ζ est bien définie : on obtient $u_\zeta^{\mu+1}$ à partir de u_ζ^μ par :

$$(5\text{-}12)\quad u_\zeta^{\mu+1} = u_\zeta^\mu - k A_\zeta^\mu u_\zeta^\mu + k f_\zeta^\mu \quad ; \quad u_\zeta^1 = u_{oh}$$

L'espace V_h étant de dimension finie, nous pouvons poser :

$$(5\text{-}13)\quad S (h) = \sup_{u_h} ||u_h||_h^{-1} \, |u_h|_h$$

Rappelons que :

$$(5\text{-}14)\quad |a_h(t ; u_h , v_h)| \leq M ||u_h||_h ||v_h||_h \; ; \; \mathrm{Re}\, a_h(t ; u_h , v_h) \geq c \, ||u_h||_h^2 .$$

D'après P.A. RAVIART [1] (chapitre I , théorème 3-1) , les solutions u_ζ du problème P_ζ vérifient une inégalité de l'énergie :

THEOREME A .

Si ζ *vérifie la condition :*

$$(5\text{-}15)\quad M^2 k S (h)^2 \leq 2 c (1 - \delta) \; ; \; \delta > 0 \quad \textit{arbitrairement petit} ,$$

Les solutions u_ζ *vérifient l'inégalité de l'énergie suivante :*

$$(5\text{-}16)\quad \sup_t |p_k\, u_\zeta|_h^2 + \int_0^T ||p_k\, u_\zeta||_h^2\, dt \leq M\, (\, ||f_\zeta||_{V'_\zeta}^2 + |u_{oh}|_h^2\,)$$

On obtient (5-16) en prenant dans (5-11) successivement $v_\zeta = u_\zeta$ et $v_\zeta = \nabla_k\, u_\zeta$ et en utilisant la relation :

$$2\ \mathrm{Re}\ (\, u\ ,\ \nabla_k\, u\,) = \nabla_k\, |u|^2 - k\, |\nabla_k\, u|^2$$

Posons (cf. §3) :

$$(5\text{-}17)\quad p_k^1 = \chi_k * p_k^o \quad :\quad p_\zeta^1 = p_k^1\, p_h\ .$$

Nous allons montrer le :

THEOREME 5-1.

Supposons que les approximations $A_h\ (V)$ *soient autoadjointes, stables et convergentes, que :*

$$(5\text{-}18)\quad \lim_{h=0}\ \Big[\int_0^T ||p_h\, v_h||_h^2\, dt\Big]^{-1/2} \int_0^T |a_h(t\ ;\ r_h^*\, u\ ,\ v_h) - a(t\ ;\ u, p_h v_h)|\, dt = 0$$

$$(5\text{-}19)\quad \begin{cases} \text{i)}\ \lim\limits_{h=0}\ |u_{oh} - r_h^*\, u_o|_h = 0 \\ \text{ii)}\ \lim\limits_{h=0}\ \Big[\int_0^T ||p_h\, v_h||_h^2\, dt\Big]^{-1/2} \int_0^T |(f_h(t),\, v_h)_h - (f(t), p_h\, v_h)|\, dt = 0 \end{cases}$$

et que (5-15) a lieu. Les solutions u_ζ *du problème* P_ζ *convergent alors vers la solution* u *du problème* P *au sens suivant :*

$$(5\text{-}20)\quad \lim_{h=0} \int_0^T \{\, ||u - p_\zeta^1\, u_\zeta||^2 + ||u' - \tfrac{d}{dt}\, p_\zeta^1\, u_\zeta||_*^2\,\}\, dt = 0$$

Il en résulte en particulier que :

$$(5\text{-}21)\quad \lim_{h=0}\ \sup_{t\in[0,T]}\ |u\ (\,t\,) - p_\zeta^1\, u_\zeta(\,t\,)| = 0$$

DEMONSTRATION.

Soit Λ_ζ l'opérateur de V_ζ dans $V'_\zeta \times V_h$ défini par :

$$\Lambda_\zeta\, u_\zeta = \{\, \nabla_k\, u_\zeta + A_\zeta\, u_\zeta\ ,\ \ u_\zeta^1\,\} = \{\, f_\zeta\ ,\ u_{oh}\,\}$$

Nous allons montrer que les opérateurs Λ_ζ sont consistants à l'opérateur Λ et que les opérateurs Λ_ζ^{-1} sont stables.

Les hypothèses (5-19) impliquant la convergence discrète de $\{ f_\zeta , u_{oh} \}$ vers $\{ f , u_o \}$ dans $W \times H$, il en résultera, d'après le théorème 2-1 du n° 2-4 du §2 du chapitre I , que les solutions u_ζ convergent discrètement vers la solution u du problème P .

Puisque les approximations autoadjointes $A_h (V)$ sont stables et convergentes, on en déduit la convergence forte de $p_\zeta^1 u_\zeta$ vers u dans l'espace W d'après le théorème 1-1 du §1 du chapitre I .

CONSISTANCE DES Λ_ζ A Λ .

Il faut démontrer que si $\int_0^T ||p_k v_\zeta||_h^2 \, dt$ est borné,

$|(r_\zeta^* \Lambda u - \Lambda_\zeta r_\zeta^* u , v_\zeta)_\zeta|$ tend vers 0 avec ζ .

Mais cela revient à montrer que $|X_\zeta| + |Y_\zeta|$ tend vers 0 avec ζ , où :

$$X_\zeta = \int_0^T \{ (u' , p_\zeta v_\zeta) - (\nabla_k r_h^* u , p_k v_\zeta)_h \} \, dt .$$

$$Y_\zeta = \int_0^T \{ a(t ; u , p_\zeta v_\zeta) - a_h (t ; p_k r_k r_h^* u , p_k v_\zeta) \} \, dt .$$

Mais puisque les approximations $A_h (V)$ sont autoadjointes ,

$$|X_\zeta| = \left| \int_0^T (u' - \nabla_k u , p_\zeta v_\zeta) \, dt \right| \leq M \int_0^T ||u' - \nabla_k u||_*^2 \, dt \quad \text{tend vers } 0 .$$

D'autre part :

$$Y_\zeta = \int_0^T \{ a (t ; u , p_\zeta v_\zeta) - a_h (t ; r_h^* u , p_k v_\zeta) \} \, dt +$$

$$+ \int_0^T a_h (t ; r_h^* (u - p_k r_k u) , p_k v_\zeta)$$

D'après l'hypothèse (5-18) , le premier terme tend vers 0 . Puisque les approximations autoadjointes $A_h (V)$ *sont stables* :

$$|a_h(t ; r_h^* (u - p_k r_k u) , p_k v_\zeta)| \leq M ||r_h^*(u - p_k r_k u)||_h ||p_k v_\zeta||_h \leq$$

$$\leq M ||u - p_k r_k u|| \, ||p_k v_\zeta||_h$$

ce qui entraîne que le second terme de Y_ζ tend vers 0 .

Nous avons donc démontré la consistance des Λ_ζ à Λ .

STABILITE DES Λ_ζ^{-1} .

Supposons que $||f_\zeta||^2_{V'_\zeta} + |u_{oh}|^2_h$ soit borné. Il résulte du théorème A que sous l'hypothèse (5-15) :

$$\sup_t \ |p_k\, u_\zeta|^2_h + \int_0^T ||p_k\, u_\zeta||^2_h \ dt \leqslant \text{cste.}$$

Montrons d'autre part que :

$$\int_0^T ||\nabla_k\, p_k\, u_\zeta||^2_{*h} \ dt \leqslant \text{cste.}$$

En effet, les approximations A_k (V_h) étant autoadjointes, on a :

$$|(\nabla_k\, p_k\, u_\zeta \ , \ v_h)_h| = |(p_k\, \nabla_k\, u_\zeta \ , \ v_h)_h| = |(\nabla_k\, u_\zeta \ , \ r_k^*\, v_h)_\zeta| =$$

$$= |(f_\zeta \ , \ r_k^*\, v_h) - a_\zeta\,(u_\zeta \ , \ r_k^*\, v_h)| \leqslant (||f_\zeta||_{V'_\zeta} + \int_0^T ||p_k\, u_\zeta||^2_h \ dt\,)\,||v_h||_h \leqslant$$

$$\leqslant M\, ||v_h||_h$$

Il en résulte donc que :

$$\int_0^T \{\ ||p_k\, u_\zeta||^2_h + ||\nabla_k\, p_k\, u_\zeta||^2_{*h}\ \}\ dt \leqslant \text{cste.}$$

On en déduit, d'après le théorème 2-1 du chapitre I , que les u_ζ convergent discrètement vers u dans W , c'est-à-dire que :

$$\int_0^T \{\ ||p_k\, u_\zeta - r_h^*\, u||^2_h + ||\nabla_k\, p_k\, u_\zeta - r_h^*\, u'||^2_h\ \}\ dt \ \text{ tend vers } \ 0 \ .$$

Puisque les approximations A_h (V) sont autoadjointes, stables et convergentes, on en déduit que :

$$\int_0^T \{\ ||p_\zeta\, u_\zeta - u||^2 + ||\nabla_k\, p_\zeta\, u_\zeta - u'||^2_*\ \}\ dt \ \text{ tend vers } \ 0$$

Ceci établit alors (5-20) puisque $\nabla_k\, p_\zeta\, u_\zeta = \frac{d}{dt}\ p_\zeta^1\ u_\zeta$.

REMARQUE 5-1.

On aurait pu considérer plus généralement les solutions u_ζ du :

PROBLEME P_ζ^θ :

Chercher u_ζ *dans* V_ζ *vérifiant, si* $0 \leq \theta \leq 1$

$$(5\text{-}22)\quad \begin{cases} \text{i)} \quad (\nabla_k u_\zeta \, , v_\zeta) + a_\zeta (u_\zeta + \theta \, k \nabla_k u_\zeta \, , v_\zeta) = (f_\zeta \, , v_\zeta) \\ \text{ii)} \quad u_\zeta^1 = u_{oh} \end{cases}$$

Pour $\theta = 0$, on retrouve le schéma explicite, pour $\theta = \frac{1}{2}$, celui de Crank-Nicholson, pour $\theta = 1$, le schéma implicite.

Les conclusions du théorème 5-1 demeurent si l'on remplace l'hypothèse (5-15) par :

$$(5\text{-}23)\quad \begin{cases} \text{i)} \quad M^2 \, k \, S (h)^2 \leq 2 \, c \, (1 - 2 \, \theta)^{-1} \, (1 - \delta) \quad \text{si} \quad \theta < \frac{1}{2} \\ \text{ii)} \quad k \, , h \quad \text{quelconques si} \quad \theta \geq \frac{1}{2} \end{cases}$$

En effet, d'après P.A. RAVIART ([1]) , les conclusions du théorème A demeurent sous l'hypothèse (5-23).

REMARQUE 5-2.

Nous avons utilisé la notion d'approximations autoadjointes pour obtenir la convergence forte de $p_\zeta^1 u_\zeta$ vers u dans l'espace W .

En prenant des approximations $A_h (V) = (V \, , V_h \, , p_h \, , r_h)$ stables et convergentes, mais non autoadjointes, nous obtenons la convergence faible de $p_\zeta \, u_\zeta$ vers u dans $L^2 (0 \, , T : V) \cap L^\infty (0 \, , T : H)$. Par des arguments de compacité et d'estimations de dérivées fractionnaires, P.A. RAVIART [1] a montré la convergence forte de $p_\zeta \, u_\zeta$ dans l'espace $L^2 (0 \, , T \, ; H)$.

MAJORATION DE L'ERREUR.

Prenons :

$$(5\text{-}24)\quad \begin{cases} (u_h \, , v_h)_h = (p_h \, u_h \, , p_h \, v_h) \\ a_h (t \, ; u_h \, , v_h) = a (t \, ; p_h \, u_h \, , p_h \, v_h) \\ (f_h (t) \, , v_h)_h = (f (t) \, , p_h \, v_h) \\ (u_{oh} \, , v_h) = (u_o \, , p_h \, v_h) \end{cases}$$

La restriction r_h^* est définie par :

$$(5\text{-}25) \quad (p_h r_h^* f , p_h v_h) = (f , p_h v_h)$$

et les solutions u_ζ du problème P_ζ sont solutions de

$$(5\text{-}26) \quad \begin{cases} (\frac{d}{dt} p_\zeta^1 u_\zeta , p_\zeta v_\zeta) + a (t ; p_\zeta u_\zeta , p_\zeta v_\zeta) = (f (t) , p_\zeta v_\zeta) \\ (p_\zeta^1 u_\zeta) (o) = r_h^* u_o . \end{cases}$$

THEOREME 5-2.

Sous l'hypothèse (5-24) , les erreurs $u - p_\zeta^1 u_\zeta$ *et* $u - p_\zeta u_\zeta$ *vérifient l'inégalité :*

$$(5\text{-}27) \quad \begin{cases} \sup_t |u (t) - p_\zeta^1 u_\zeta (t)|^2 + \int_0^T ||u - p_\zeta u_\zeta||^2 dt \leq \\ \leq M \left[(\int_0^T \{ ||u - p_\zeta r_\zeta u||^2 + k ||\nabla_k p_\zeta u_\zeta||^2 \} dt)^{1/2} + |u_o - p_h r_h^* u_o|^2 \right] \end{cases}$$

quelle que soit la restriction r_h *de* V_h *dans* V .

On remarque en effet que :

$$(\frac{d}{dt} (u - p_\zeta^1 u_\zeta) , u - p_\zeta^1 u_\zeta) + a (t : u - p_\zeta u_\zeta , u - p_\zeta u_\zeta) =$$

$$= (\frac{d}{dt} (u - p_\zeta^1 u_\zeta) + A (t) (u - p_\zeta u_\zeta) , u - p_\zeta r_\zeta u) +$$

$$+ (\frac{d}{dt} (u - p_\zeta^1 u_\zeta) , p_\zeta^1 u_\zeta - p_\zeta u_\zeta)$$

Mais nous avons vu (§3 , n° 3-3 , (3-43)) que si $u_k^\mu = p_h u_\zeta^\mu$,

$$\int_0^T ||p_k^1 u_k - p_k u_k||^2 = k \int_0^T || \sum_\mu (\nabla_k u_k)^\mu (\frac{t}{h} - \mu + 1) k^{1/2} \chi_k^\mu ||^2 \leq$$

$$\leq k \int_0^T ||\nabla_k p_k u_k||^2 dt .$$

On en déduit alors (5-27) en intégrant cette inégalité.

5-2. APPROXIMATION DES SOLUTIONS DES EQUATIONS PARABOLIQUES.

Prenons pour espace V l'espace $H_o^1 (\Omega)$, pour espace H l'espace $L^2 (\Omega)$ et pour forme $a (t ; u , v)$ la forme

$$(5\text{-}28)\quad \left\{ \begin{array}{l} a(t\,;u\quad v) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x\,,t)\, D_i u \,.\, \overline{D_j v}\; dx + \\ \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x\,,t)\, D_i u \,.\, \overline{v}\; dx + \int_\Omega a_o(x\,,t)\, u\, \overline{v}\; dx\,. \end{array} \right.$$

où les coefficients $a_{ij}(x\,,t)$, $a_i(x\,,t)$, $a_o(x\,,t)$ appartiennent à $L^\infty(\Omega \times (0\,,T))$ et vérifient :

$$(5\text{-}29)\quad \mathrm{Re} \sum a_{ij}(x\,,t)\,\zeta_i\,\overline{\zeta}_j \geqslant c\,|\zeta|^2 \;\; ; \text{ pour presque tout } x\,,t\,.$$

Il existe alors une solution unique $u(x\,,t)$ du problème de Cauchy-Dirichlet :

PROBLEME P .

$$(5\text{-}30)\quad \left\{ \begin{array}{l} \text{i)}\ \dfrac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^{n} D_j(a_{ij}(x\,,t)D_i u) + \sum_{i=1}^{n} a_i(x\,,t)D_i u + a_o(x,t)u = f(t) \\ \\ \text{ii)}\ u(x\,,o) = u_o(x) \quad \textit{dans}\ L^2(\Omega) \\ \\ \text{iii)}\ u(x\,,t)|_\Gamma = 0 \quad ;\ \Gamma\ \textit{est la frontière de}\ \Omega\,. \end{array} \right.$$

Soit $\vec{L} = (L_o\,, L_1\,, \ldots, L_n)$ $n+1$ multientiers tels que $L_i \geqslant e_i$. Soit $L = \sup_{0 \leqslant i \leqslant n} L_i$.

Prenons pour espace V_h l'espace $W^{1,2}_{o,h}(\Omega\,, L)$ et pour produit scalaire $(u_h\,.\,v_h)_h$.

$$(5\text{-}31)\quad (u_h\,, v_h)_h = \sum_\alpha u_h^\alpha\, \overline{v}_h^\alpha$$

Considérons les prolongements $p_h^{L_i} u_h$, $p_h^L u_h$ définis au n° 3-2 du §3 , et pour restriction r_h la restriction r_h^{*L} . Les approximations

$$(5\text{-}33)\quad A_h(V) = (V\,, V_h\,, p_h^L\,, r_h^{*L})$$

sont autoadjointes. stables et convergentes si l'ouvert Ω est suffisamment régulier, d'après le théorème 3-2 du n° 3-2 du §3 .

Prenons pour forme $a_h(t\,;u_h\,,v_h)$ la forme suivante :

$$(5\text{-}34)\quad \begin{cases} a_h(t\,;\,u_h\,,\,v_h) = \sum_{i,j=1}^{n} \int_\Omega a_{ij}(x\,,\,t)\; D_i\, p_h^{Li}\, u_h\,,\, D_j\, p_h^{Lj}\, v_h \;dt + \\ \\ + \sum_{i=1}^{n} \int_\Omega a_i(x\,,\,t)\; D_i\, p_h^{Li}\, u_h\, p_h^{Lo}\, v_h\; dt + \int_\Omega a_o(x\,,\,t)\; p_h^{Lo}\, u_h\, p_h^{Lo}\, v_h\; dt \end{cases}$$

Prenons

$$(5\text{-}35)\quad (f_h(t)\,,\,v_h)_h = (f(t)\,,\,p_h^{Lo}\, v_h) \quad \text{et} \quad (u_{oh}\,,\,v_h)_h = (u_o\,,\,p_h^{Lo}\, v_h).$$

D'après le théorème 2-1 du §2 de ce chapitre, la fonction $S(h)$ est majorée par

$$N \Big(\sum_{i=1}^{n} h_i^{-2} \Big)^{1/2}$$

On déduit du théorème 5-1 et des résultats du n° 3-2 la :

PROPOSITION 5-1.

Supposons que (5-31) , (5-34) et (5-35) aient lieu. Si

$$(5\text{-}36)\quad k \sum_{i=1}^{n} h_i^{-2} \leqslant 2\, c\, M^{-2}\, N^{-2}\, (1 - \delta)\quad ,\quad \delta > 0$$

les solutions u_ζ *de l'équation variationnelle :*

$$(5\text{-}37)\quad \begin{cases} \int_0^T \{(\nabla_k\, p_k\, u_\zeta\,,\, p_k\, v_\zeta)_h + a_h(t\,;\, p_k\, u_\zeta\,,\, p_k\, v_\zeta)\}dt = \int_0^T (f_h(t), p_k\, v_\zeta)\; dt \\ \\ u_\zeta^1 = u_{oh} \end{cases}$$

convergent vers la solution u *de (5-30) au sens suivant :*

$$(5\text{-}38)\quad \begin{cases} p_k\, p_h^L\, u_\zeta \text{ converge vers } u \text{ dans } L^2(0\,,\,T : V) \text{ fort.} \\ \nabla_k\, p_k\, p_h^L\, u_\zeta = \frac{d}{dt}\; p_k^1\, p_h^L\, u_\zeta \text{ converge vers } u' \text{ dans } L^2(0\,,\,T\,;\,V') \text{ fort.} \\ p_k^1\, p_h^L\, u_\zeta \text{ converge vers } u \text{ dans } C(0\,,\,T\,;\,H) \text{ fort.} \end{cases}$$

Les matrices associées aux opérateurs A_h ont été explicitées au n° 4-2 du §4 .

5-3. CONSTRUCTION DE SCHEMAS A PLUSIEURS NIVEAUX - MAJORATION DE L'ERREUR.

La solution u de l'équation $u' + A(t)u = f$, $u(o) = u_o$ est solution du :

PROBLEME P .

Chercher u *dans* $L^2 (0 , T , V)$ *vérifiant :*

$$(5\text{-}39)\quad \begin{cases} E (u , \phi) = \displaystyle\int_0^T \{ - (u , \phi') + a (t ; u , \phi) \} \, dt = F (\phi) = \\ \qquad = \displaystyle\int_0^T (f (t) , \phi (t) \, dt + (u_0 , \phi (o)) \end{cases}$$

pour toute fonction ϕ *de l'espace* Φ :

$$(5\text{-}40)\quad \Phi = \{ \phi \in L^2 (0 , T ; V) \ ; \ \phi' \in L^2 (0 , T : V') \ , \ \phi (T) = 0 \} .$$

(cf. n° 5-1 du §5 du chapitre I) .

L'existence d'une solution du problème P peut être établie à l'aide du lemme des projections (cf. J.L. LIONS [1] et le n° 3-6 du §3 du chapitre I , théorème 3-6) . Nous allons utiliser ce théorème pour construire des problèmes approchés et montrer la *convergence forte* de leurs solutions.

Nous approcherons le problème P posé dans $L^2 (0 , T ; V)$ par des problèmes P_k posés dans V (semi-discrétisation par rapport à la variable de temps). La discrétisation complète s'obtient alors aisément en introduisant des approximations $A_h (V)$ et en utilisant les résultats du §3 et du §5 du chapitre I . Nous n'expliciterons pas ici cette deuxième étape de l'approximation, qui n'offre aucune difficulté.

Posons :

$$(5\text{-}41)\quad |||\phi||_V = \Big(\int_0^T ||\phi (t)||^2 \, dt \Big)^{1/2} \ ; \quad |||\phi||| = \big(|||\phi|||_V + |\phi (o)|^2 \big)^{1/2}$$

Soit L un entier ≥ 1 . Posons :

$$(5\text{-}42)\quad \begin{cases} R_k^L (0 , T) = \{ \alpha \in N \ ; \ 1 \leq \alpha \leq T k^{-1} + L + 1 \} \\ V_k = \{ u_k = (u_k^\alpha) \ ; \ u_k^\alpha \in V \ : \ 1 \leq \alpha \leq T k^{-1} + L + 1 \} \\ \Phi_k = \{ \phi_k = (\phi_k^\alpha) \ ; \ \phi_k^\alpha \in V \ : \ \phi_k^\alpha = 0 \ \text{ pour } \ \alpha \geq T k^{-1} \} \end{cases}$$

On introduit les prolongements $p_k = p_k^L$:

$$(5\text{-}43)\quad p_k^L u_k = \sqrt{k} \sum_{\alpha=1}^{Tk^{-1}+L+1} u_k^\alpha \, \chi_{L+1,k}^\alpha (t) .$$

Si π est le prolongement de Babitch (par exemple ; cf. §3 , n° 3-3 , exemple 3-1) , et si γ_k est une fonction nulle pour $t \geqslant T - (L + 1)k$, tendant vers 1 dans $W^{1,\infty} (- \infty, T)$, on introduit les restrictions :

$$(5\text{-}44) \qquad r_k \phi = \sqrt{k} \, (\pi \phi \, , \chi_k^\alpha)_\alpha \quad ; \quad s_k \phi = \sqrt{k} \, (\gamma_k \pi \phi \, , \chi_k^\alpha)_\alpha$$

On considère enfin les normes :

$$(5\text{-}45) \qquad ||\phi_k||_k = ||p_k^L \phi||_V \quad ; \quad |||\phi_k|||_k = |||p_k^L \phi_k|||$$

Nous nous posons alors le :

PROBLEME P_k .

Chercher u_k *dans* V_k *vérifiant :*

$$(5\text{-}46) \quad \begin{cases} E(u_k \, , \phi_k) = \displaystyle\int_0^T \{ a(t \, ; p_k^L u_k \, , p_k^L \phi_k) - (p_k^L u_k \, , p_k^L \phi_k) \} \, dt = \\ = F_k (\phi_k) = \displaystyle\int_0^T (f(t) \, , p_k^L \phi_k) \, dt + (u_o \, , p_k^L \overline{\phi_k}(o)). \end{cases}$$

pour toute fonction ϕ_k *de* Φ_k .

Avant de montrer que des solutions u_k du problème P_k convergent vers la solution u du problème P , nous allons expliciter le schéma auquel conduit l'équation (5-46) dans le cas où $A(t) = A$ ne dépend pas de t pour simplifier un peu les calculs.

Rappelons que :

$$\chi_{L+1}(t) = \sum_{k=0}^{L} \psi_L^k (t + L - k) \, \chi^{-L+k}(t)$$

Posons, si α et q sont des entiers :

$$(5\text{-}47) \quad \begin{cases} \Gamma_\alpha^q = \displaystyle\sum_{r=\sup(L+1-\alpha,q)}^{L} \int_{-1}^{0} \psi_L^{r-q}(t) \cdot \frac{d}{dt} \psi_L^r(t) \, dt \, . \quad si \quad q \geqslant 0 \, . \\ \Gamma_\alpha^q = \displaystyle\sum_{r=\sup(L+1-\alpha,0)}^{L+q} \int_{-1}^{0} \psi_L^{r-q}(t) \cdot \frac{d}{dt} \psi_L^r(t) \, dt \, . \quad si \quad q < 0 \, . \\ \Omega_\alpha^q = \displaystyle\sum_{r=\sup(L+1-\alpha,q)}^{L} \int_{-1}^{0} \psi_L^{r-q}(t) \cdot \psi_L^r(t) \, dt \, . \quad si \quad q \geqslant 0 \, . \\ \Omega_\alpha^q = \displaystyle\sum_{r=\sup(L+1-\alpha,0)}^{L+q} \int_{-1}^{0} \psi_L^{r-q}(t) \cdot \psi_L^r(t) \, dt \, . \quad si \quad q < 0 \, . \end{cases}$$

Les expressions Γ_α^q et Ω_α^q ne dépendent pas de α si $\alpha \geqslant L + 1$ et sont nulles si $|q| \geqslant L$. Si $\alpha < L + 1$, ces expressions dépendent de α et sont

nulles si $q \leq 1 - \alpha$ et $q \geq L$.

PROPOSITION 5-2.

Les solutions $u_k = (u_k^\alpha)_{1 \leq \alpha \leq Tk^{-1}+L+1}$ *du problème* P_k *vérifient :*

$$(5\text{-}48)\quad \begin{cases} \text{i)} & u_k^\alpha \text{ arbitraires si } 1 \leq \alpha \leq L . \\ \text{ii)} & \sum_{1-\alpha}^{L} (k^{-1} \Gamma_\alpha^q + A\, \Omega_\alpha^q) u_k^{\alpha+q} = k^{-1} a_L(L + 1 - \alpha, 0) + f_k^\alpha \text{ si } 1 \leq \alpha \leq L \\ \text{iii)} & \sum_{-L}^{+L} (k^{-1} \Gamma^q + A\, \Omega^q)\, u_k^{\alpha+q} = f_k^\alpha \text{ si } L + 1 \leq \alpha \leq T\, k^{-1} \end{cases}$$

Il en résulte donc que les u_k sont solutions d'un schéma à $2\,L + 1$ "niveaux", implicite ; Seule la donnée des L premières composantes $u_k^1 , \ldots . u_k^L$ est arbitraire, les $L + 1$ autres composantes du "démarrage" étant déterminées par (5-48) ii) .

Il existe donc des solutions du problème P_k , uniques si les L premières composantes de la suite u_k sont fixées.

THEOREME 5-3.

Il existe des composantes $u_k^1 , \ldots . u_k^L$ *telles que les solutions* u_k *du problème* P_k *convergent fortement dans* $L^2 (0 , T ; V)$ *vers la solution* u *du problème* P :

$$(5\text{-}49)\quad \lim_{k=0} \int_0^T \| u(t) - p_k^L u_k(t) \|^2 \, dt = 0 .$$

L'erreur $u - p_k^L u_k$ *est majorée par :*

$$(5\text{-}50)\quad \| u - p_k^L u_k \|_V \leq M \left(\| u - p_k^L r_k u \|_V^2 + \| \tfrac{d}{dt} (u - p_k^L r_k u) \|_V^2 \right)^{1/2} .$$

Vérifions que les hypothèses (3-50) et (3-53) du théorème 3-6 du n° 3-6 du §3 . chapitre I sont satisfaites.

Par intégration par parties, puisque $p_k^L \phi_k (T) = 0$, on obtient :

$$(5\text{-}51)\quad \begin{cases} 2 \operatorname{Re} E_k (\phi_k , \phi_k) \geq \inf (1 , c) \int_0^T \left[\| p_k^L \phi_k \|^2 \, dt + | p_k^L \phi_k (o) |^2 \right] \\ \qquad = \inf (1 , c) \, |||\phi_k|||_k^2 \end{cases}$$

D'autre part :

$$(5\text{-}52)\qquad |F_k(\phi_k)| \leq \tfrac{1}{2}\,\|f\|_{V'}\,\|p_k^L\,\phi_k\|_V + |u_o|\,|p_k^L\,\phi_k(o)| \leq c'\,|||\phi_k|||_k\ .$$

Montrons maintenant que :

$$(5\text{-}53)\qquad \sup_{\phi_k} |||\phi_k|||_k^{-1}\ E(u - p_k^L\,r_k\,u\ ,\ p_k^L\,\phi_k)\ \text{ tend vers } 0 \text{ avec } k\ .$$

Mais, en intégrant par parties, on obtient :

$$(5\text{-}54)\qquad E(u\ ,\ \phi) = \int_0^T \{\,(u'\ ,\ \phi) + a(t\,;u\ ,\ \phi)\,\}\,dt + (u(o)\ .\ \phi(o))$$

si bien que si $\tau_k\,u = u - p_k^L\,r_k\,u$, on a :

$$(5\text{-}55)\qquad \begin{cases} |E(\tau_k\,u\ ,\ p_k^L\,\phi_k)| \leq \\ \\ \leq M\,(\,\|\tau_k\,u\|_V^2 + \|\frac{d}{dt}(\tau_k\,u)\|_{V'}^2 + |\tau_k\,u(o)|^2)^{1/2}\ |||\phi_k|||_k \end{cases}$$

ce qui établit (5-53) . Le théorème 3-6 du n° 3-6 du §3 , chapitre I entraîne la convergence forte de $p_k^L\,u_k$ vers u dans V .

D'autre part, si $\varepsilon_k = u_k - r_k\,u$, on a :

$$(5\text{-}56)\qquad E_k(\varepsilon_k\ ,\ \phi_k) = E(p_k^L\,\varepsilon_k\ ,\ p_k^L\,\phi_k) = E(\tau_k\,u\ ,\ p_k^L\,\phi_k) = G_k(\phi_k)$$

D'après (5-55) , la norme $|||G_k|||$ de G_k est majorée par

$$(5\text{-}57)\qquad |||G_k||| \leq M\,(\,\|\tau_k\,u\|_V^2 + \|\frac{d}{dt}\,\tau_k\,u\|_{V'}^2\,)^{1/2}$$

puisque $|u(o)|^2 \leq M\,(\,\|u\|_V^2 + \|u'\|_{V'}^2\,)^{1/2}$.

Il en résulte alors que :

$$(5\text{-}58)\qquad \|p_k^L\,u_k - p_k^L\,r_k\,u\|_V \leq M\,|||G_k||| \leq M\,(\,\|\tau_k\,u\|^2 + \|(\tau_k\,u)'\|_{V'}^2\,)^{1/2}$$

ce qui achève la démonstration du théorème.

EXEMPLE 5-1.

En prenant $L = 1$, nous obtenons le schéma suivant :

$$(5\text{-}59)\qquad \frac{u_k^{\alpha+1} - u_k^{\alpha-1}}{2k} + A\,\Big(\frac{u_k^{\alpha+1}}{6} + \frac{u_k^{\alpha}}{3} + \frac{u_k^{\alpha-1}}{6}\Big) = f_k^{\alpha} \qquad \text{si } \alpha \geq 1\ .$$

On retrouve un schéma décrit dans V. SAULEV [1] .

A P P E N D I C E

RAPPELS DE THEOREMES D'ISOMORPHISME ET D'INTERPOLATION.

1) LE TRIPLET $A = \{ V , H , a (u , v) \}$.

Nous désignerons par $A = \{ V , H , a (u , v) \}$ la donnée de deux espaces de Hilbert V et H et d'une forme $a (u , v)$ vérifiant :

a) V *est contenu dans* H *avec une topologie plus fine.* V *est dense dans* H. Les produits scalaires et les normes de H et de V sont respectivement notés :

$$(1) \quad (f , g) \quad : \quad |f| = (f , f)^{1/2} \quad ; \quad ((u , v)) \quad ; \quad ||u|| = ((u , u))^{1/2}$$

b) *La forme sesquilinéaire* $a (u , v)$ *est continue sur* $V \times V$:

$$(2) \quad |a (u , v)| \leq M \, ||u|| \, ||v|| .$$

2) LES ESPACES V ET H .

On identifiera toujours l'espace H à son anti-dual par le produit scalaire (f , g) . Puisque V est dense dans H , *l'espace* H *s'identifie à un sous-espace dense de l'anti-dual* V' *de* V .

(pour la dualité définie par le produit scalaire (f , g)).

$$(3) \quad V \subset H \subset V' \quad ; \quad k^{-1} \, ||v||_* \leq |v| \leq k \, ||v|| .$$

Si Λ est l'isomorphisme canonique de V sur V' , J son inverse, V' est muni d'une structure hilbertienne définie par :

$$(4) \quad ((u , v))_* = ((J u , J v)) = (J u , v)$$

3) LES OPERATEURS DEFINIS PAR $A = \{ V , H , a (u , v) \}$.

Tout d'abord, la forme $a (u , v)$ étant continue sur V , elle définit un opérateur continu A de V dans V' par :

$$(4) \quad (A u , v) = a (u , v) \quad \text{pour tout } v \text{ de } V .$$

Le triplet A définit aussi un opérateur non borné sur H . On désigne par $D (A)$ le sous espace des $u \in V$ tels que les formes $A u$:

$$(5) \quad A u : v \longrightarrow a (u , v) \quad ; \quad u \in V$$

sont continues pour la topologie induite par H. L'espace V étant dense dans H, elles se prolongent à H tout entier.

En munissant $D(A)$ de la *norme du graphe* :

(6) $|u|_{D(A)} = (|u|^2 + |Au|^2)$; $u \in D(A)$

A est un opérateur continu de $D(A)$ dans H.

On désignera par A^* le triplet défini par

(7) $A^* = \{ V , H , a^*(u , v) \}$; $a^*(u , v) = a(v , u)$

4) THEOREME D'ISOMORPHISME.

Supposons que $A = \{ V , H , a(u , v) \}$ *soit coercif* :

(8) $\mathrm{Re}\, a(v , v) \geq c\, ||v||^2$; $c > 0$; $v \in V$.

Alors :

(9) . $D(A)$ *et* $D(A^*)$ *sont denses dans* V *et* H *et sont des espaces de Hilbert pour la norme du graphe.*

(10) . A^* *est l'adjoint de* A.

(11) . A *est un isomorphisme de* V *sur* V', *de* $D(A)$ *sur* H *et de* H *sur* $D(A^*)'$.

Commentons ce dernier point. Puisque $D(A^*)$ est dense dans V et H, nous pouvons faire les identifications suivantes :

(12) $D(A^*) \subset V \subset H \subset V' \subset D(A^*)'$

Le transposé $(A^*)'$ de l'adjoint de A^*, comme isomorphisme de $D(A^*)$ sur H, est un isomorphisme de H sur $D(A^*)'$ et $(A^*)'$ prolonge A de $D(A)$ à H, puisque $(A^*)' = A$ sur $D(A)$. Ceci justifie le fait de poser $(A^*)' = A$.

5) ESPACES D'INTERPOLATIONS (cf. J.L. LIONS - J. PEETRE [1]).

Soient A_0 et A_1 deux espaces de Banach, $A_0 \subset A_1$, A_0 dense dans A_1 ; On définira l'espace :

(13) $S(\theta , A_0 , A_1)$; $0 < \theta < 1$

comme l'espace des intégrales des fonctions $\phi(x)$ vérifiant :

(14) $\exp(\theta x)\ \phi(x) \in L^2(A_o)$; $\exp((\theta - 1)x)\ \phi(x) \in L^2(A_1)$

muni de la norme :

(15) $$||u||_{S(\theta,A_o,A_1)} = \inf_{\phi} \{ \max(||e^{\theta x}\ \phi(x)||_{L^2(A_o)}, ||e^{(\theta-1)x}\ \phi(x)||_{L^2(A_1)}) ; u = \int \phi(x)\, dx \}$$

On posera $S(0, A_o, A_1) = A_o$, $S_1(1, A_o, A_1) = A_1$.

Les espaces $S(\theta, A_o, A_1)$ sont des exemples d'espace d'interpolation entre A_o et A_1 , c'est-à-dire d'espaces vérifiant le :

Théorème d'interpolation :

Si $A \in L(A_o, B_o) \cap L(A_1, B_1)$, *alors* $A \in L(S(\theta, A_o, A_1), S(\theta, B_o, B_1))$ *et :*

(16) $$||A||_{L(S(\theta,A_o,A_1),S(\theta,B_o,B_1))} \leq ||A||^{1-\theta}_{L(A_o,B_o)}\ ||A||^{\theta}_{L(A_1,B_1)}$$

Ces espaces vérifient en outre :

(17) $S(\theta, A_o, A_1)' = S(1 - \theta, A_1', A_o')$

(18) $H = S(\frac{1}{2}, V, V')$

B I B L I O G R A P H I E

J.P. AUBIN

[1] Etude d'une certaine classe d'équations aux dérivées partielles non linéaires. CR. Acad. Sciences. 256 (1963) p. 350 - 352 .

[2] Un théorème de compacité. CR. Acad. Sciences. 256 (1963) p. 5042 - 5044.

[3] Evaluation des erreurs de troncature dans les espaces de Sobolev. A paraître dans S.I.A.M.

[4] Behavior of the error of the approximate solutions of boundary value problems for linear elliptic operators by Galerkin's and finite difference methods - A paraître dans Annali della scola Norm. Pisa.

[5] Non linear Stability - Approximation of solutions of non linear operational equations - A paraître.

[6] Approximation of solution of variational inequations - In Optimization and functional analysis - Academic Press (1967) .

[7] Interpolation et Approximation optimales. A paraître.

N. BOURBAKI

[1] Espaces vectoriels topologiques - Hermann.

J. CEA

[1] Approximation variationnelle des problèmes aux limites. Annales Inst. Fourier 14 (1964) p. 345 - 444 .

[2] A paraître.

[3] Séminaire J. CEA. J.L. LIONS. (1965) .

Y.K. DEMIANOVITCH

[1] D.A.N. 159 (1964) p. 250 - 253 .

J. DIEUDONNE

[1] On biorthogonal Systems - Michig. Math. J. 2 (1954) p. 7 - 20 .

N. DUNFORD - J. SCHWARZ

[1] Linear Operators (I) . Interscience Publishers (1958) .

E. GAGLIARDO

[1] Proprieta di alcune classi di funzioni in piu variabili. Ren. Sem. Mat di Padova - 27 (1957) p. 284 - 305 .

S.K. GODUNOV - V.S. RYABENKII

[1] Introduction à la théorie des Schémas aux différences finies - Moscou (1962) .

P. HARTMANN - G. STAMPACCHIA

[1] A paraître.

O.A. LADYJENSKAYA

[1] Problèmes mixtes pour les équations hyperboliques - Moscou.

P.D. LAX

[1] Cf. R.D. RICHTMYER - Difference methods for initial value Problems - Interscience Publishers. (1957) .

J. LERAY - J.L. LIONS

[1] Quelques résultats de Visik sur les problèmes elliptiques non linéaires par les méthodes de Minty-Browder - Bull Soc. Mat. Fr. 93 (1965) p. 97 - 107 .

J.L. LIONS

[1] Equations différentielles opérationnelles. Springer Verlag (1961) .

[2] Problèmes aux limites dans les équations aux dérivées partielles. Editions de l'université de Montréal (1962) .

[3] Sur les problèmes mixtes pour certains systèmes paraboliques dans les ouverts non cylindriques. Ann. Inst. Fourier. 7 (1957) p. 143 - 182 .

[4] Dérivées intermédiaires et espaces intermédiaires. CR. Acad. Sciences 256 (1963) p. 4343 - 4345 .

J.L. LIONS - J. PEETRE

[1] Sur une classe d'espaces d'Interpolation. Pub. Math. Inst. Htes. Et. Scienti. n° 19 .

L. NIRENBERG

[1] On elliptic partial differential equations. Cours de Pise (1958) .

P.A. RAVIART

[1] Sur l'approximation de certaines équations d'évolution linéaires et non linéaires. (Thèse à paraître).

V.K. SAULIEV

[1] Intégration des équations du type parabolique par la méthode des réseaux Moscou (1960) .

I.J. SCHOENBERG

[1] On interpolation by spline functions and its minimal properties. Inter series of Num. Math. 5 - 109 - 129 (1964) .

L. SCHWARTZ

[1] Théorie des distributions (Hermann).

S.L. SOBOLEV

[1] Congrès I.F.I.P. (1965) .

[2] Certaines applications de l'analyse fonctionnelle à la physique mathématique. (Léningrad 1950) .

[3] Estimation de certaines sommes pour les fonctions définies sur un réseau. Isv. Acad. Nauk. (Ser Mat) 1 (1957) p. 81 - 86 .

G. STAMPACCHIA

[1] Equations elliptiques du second ordre à coefficients discontinus. Collège de France (1964) .

[2] Formes bilinéaires coercitives sur les ensembles convexes CR. Acad. Sciences 258 (1964) p. 4413 - 4416 .

V. THOMEE

[1] Elliptic difference operators and Drichlet's problem. Contributions to differentiel equations. III (1964) p. 301 - 324 .

M.M. VAINBERG

[1] Variational Methods for the study of non linear operators - Holden Day Inc. (1964) .

ACHEVE D'IMPRIMER
LE 10 JANVIER 1968
PAR JOSEPH FLOCH
MAITRE - IMPRIMEUR
A MAYENNE
n° 2999